

GEOMETRIA EM MOVIMENTO – DO GEOPLANO AO TWISTER

Melissa Grazziotin

Colégio Odila Gay da Fonseca, seducmelissagraz@gmail.com

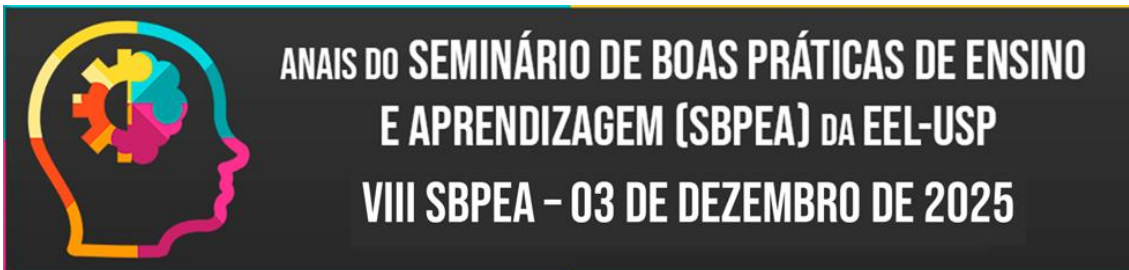
Resumo

O projeto buscou aplicar conceitos de área e perímetro de figuras planas de maneira prática e lúdica usando o Geoplano e finalizando com um Twister Matemático para fixação. Os objetivos específicos incluíram o manuseio do Geoplano para visualizar superfície e contorno, o cálculo exato de perímetros de lados inclinados pelo Teorema de Pitágoras (fórmula da distância) e de áreas de polígonos irregulares pela Fórmula de Pick. A metodologia em quatro etapas priorizou o desenvolvimento conceitual no Geoplano. Na Etapa 1, os estudantes construíram polígonos e aplicaram Pitágoras para perímetros (incluindo raízes). Na Etapa 2, investigaram a relação entre a área (A), pinos no contorno (b), e pinos internos (i) – calculada inicialmente por decomposição – até deduzirem ou confirmarem a fórmula de Pick $A = \frac{b}{2} + i - 1$. A Etapa 3 foi a preparação do jogo, e a Etapa 4, o Twister. A avaliação ocorreu primariamente através do Twister, um jogo de fixação cinestésica. Nele, os estudantes resolviam desafios de área e perímetro (aplicando Pitágoras e Pick a figuras do Geoplano) e posicionavam o membro sorteado no círculo com o resultado correto. A avaliação formal considerou a precisão dos registros no Geoplano (uso correto das fórmulas), a proficiência e rapidez nos cálculos durante o jogo e uma autoavaliação conceitual. O projeto comprovou a eficácia da manipulação concreta e do engajamento lúdico para consolidar conceitos complexos de geometria.

Palavras-chave: Áreas, Geometria plana, Geoplano, Fórmula de Pick.

Abstract

The project aimed to apply concepts of area and perimeter of plane figures in a practical and playful way using the Geoboard and culminating in a Mathematical Twister game for

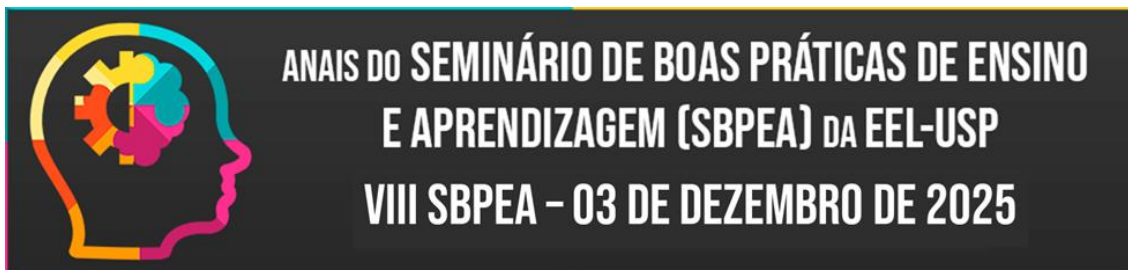


reinforcement. Specific objectives included handling the Geoboard to visualize surface (area) and boundary (perimeter), the exact calculation of perimeters of slanted sides using the Pythagorean Theorem (distance formula), and the calculation of areas of irregular polygons using Pick's Formula. The four-stage methodology prioritized conceptual development on the Geoboard. In Stage 1, students constructed polygons and applied Pythagoras for perimeters (including roots). In Stage 2, they investigated the relationship between the area (A), boundary pegs (b), and interior pegs (i) – initially calculated by decomposition – until they deduced or confirmed Pick's formula $A = \frac{b}{2} + i - 1$. Stage 3 involved game preparation, and Stage 4 was the Twister game. Assessment primarily took place through Twister, a kinesthetic reinforcement game. In the game, students solved area and perimeter challenges (applying Pythagoras and Pick to Geoboard figures) and placed the drawn body part on the circle with the correct result. Formal evaluation considered the accuracy of Geoboard records (correct formula usage), proficiency and speed in calculations during the game, and a conceptual self-assessment. The project demonstrated the effectiveness of concrete manipulation and playful engagement in consolidating complex geometry concepts.

Keywords: Areas, Plane Geometry, Geoboard, Pick's Formula.

Resumen

El proyecto buscó aplicar conceptos de área y perímetro de figuras planas de manera práctica y lúdica utilizando el **Geoplano** y culminando con un **Twister Matemático** para la fijación. Los objetivos específicos incluyeron el manejo del Geoplano para visualizar superficie y contorno, el cálculo exacto de perímetros de lados inclinados mediante el **Teorema de Pitágoras** (fórmula de la distancia) y de áreas de polígonos irregulares con la **Fórmula de Pick**. La metodología de cuatro etapas priorizó el desarrollo conceptual en el Geoplano. En la Etapa 1, los estudiantes construyeron polígonos y aplicaron Pitágoras para perímetros (incluyendo raíces). En la Etapa 2, investigaron la relación entre el área (A), los clavos en el contorno (b) y los clavos interiores (i) – calculada inicialmente



por descomposición – hasta que dedujeron o confirmaron la fórmula de Pick $A = \frac{b}{2} + i - 1$. La Etapa 3 fue la preparación del juego, y la Etapa 4, el Twister. La evaluación se llevó a cabo principalmente a través del Twister, un juego de fijación cinestésica. En él, los estudiantes resolvían desafíos de área y perímetro (aplicando Pitágoras y Pick a figuras del Geoplano) y colocaban la extremidad sorteada en el círculo con el resultado correcto. La evaluación formal consideró la precisión de los registros en el Geoplano (uso correcto de las fórmulas), la competencia y rapidez en los cálculos durante el juego y una autoevaluación conceptual. El proyecto demostró la eficacia de la manipulación concreta y el compromiso lúdico para consolidar conceptos complejos de geometría.

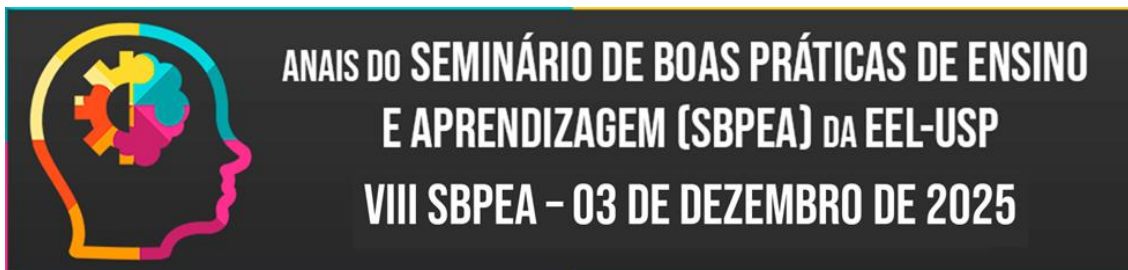
Palabras clave: Áreas, Geometría plana, Geoplano, Fórmula de Pick.

1. INTRODUÇÃO

O presente relato de experiência descreve uma prática pedagógica inovadora e equitativa desenvolvida com o objetivo de aplicar os conceitos de área e perímetro de figuras planas, explorando sua representação no Geoplano e finalizando com um jogo lúdico e cinestésico.

A proposta visa superar a abordagem tradicional, frequentemente abstrata e descontextualizada, que gera dificuldades de aprendizado em Geometria. A vivência buscou promover uma aprendizagem significativa, transformando o estudante em agente ativo de seu conhecimento.

O trabalho pedagógico sustenta-se em pilares teóricos que destacam a importância da concretude e manipulação no ensino de Geometria, como defendido por diversos autores que ressaltam o valor de recursos táteis como o Geoplano para a construção do pensamento espacial e o estudo de propriedades de figuras planas. Além disso, a estratégia integra a ludicidade e a abordagem cinestésica (Twister Matemático) para a fixação de conceitos, alinhando-se a referenciais que apontam o jogo como um poderoso



instrumento de desenvolvimento cognitivo, afetivo e social, capaz de tornar a Matemática mais prazerosa, acessível e desafiadora.

Os objetivos específicos delinearam a jornada de aprendizagem, tais como:

- (1) Manuseio do Geoplano para a visualização e distinção entre área (superfície) e perímetro (contorno);
- (2) Cálculo de perímetros, utilizando o Teorema de Pitágoras para lados inclinados, e de áreas de polígonos irregulares por meio da Fórmula de Pick; e
- (3) Fixação e consolidação dos conceitos com o jogo Twister Matemático.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

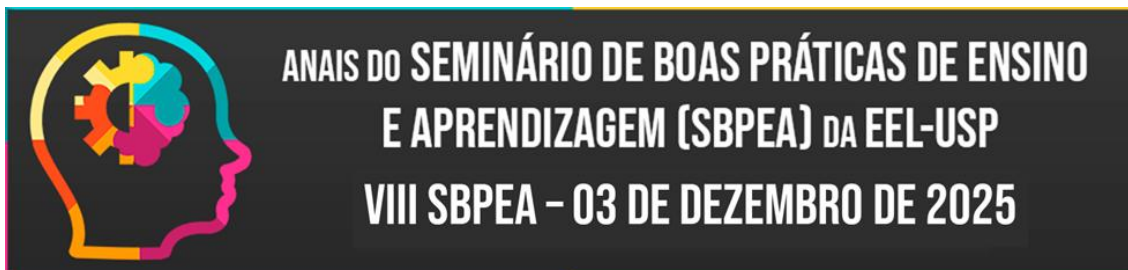
A prática pedagógica descrita no projeto se fundamenta em pilares robustos da Educação Matemática que defendem a aprendizagem significativa por meio da manipulação concreta, da investigação ativa e do engajamento lúdico.

2.1. O Material Manipulável como Mediador do Conhecimento: O Geoplano

O Geoplano, criado por Caleb Gattegno em 1961, é o recurso didático central, atuando como um poderoso material manipulável que facilita a transição do conhecimento empírico para o formal em Geometria.

Autores como Lorenzato (2006) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam que o manuseio de objetos é essencial para a construção do pensamento espacial. O Geoplano permite aos estudantes tocar e construir as formas, visualizando a diferença fundamental entre perímetro (o contorno, o elástico) e área (a superfície interna), conceitos frequentemente confundidos na abordagem puramente abstrata.

O Geoplano não serve apenas para ilustração, mas para a investigação (MENEZES, 2008). A sua malha quadriculada, que remete a um plano cartesiano, possibilita que os estudantes observem padrões, formulem hipóteses e registrem dados de forma sistemática, um processo crucial para a construção ativa do conhecimento.



2.2. A Articulação Formal dos Conceitos Avançados

O projeto inova ao introduzir ferramentas de Geometria Analítica e Tópicos Especiais da Matemática para garantir a precisão dos cálculos e a capacidade de generalização dos alunos.

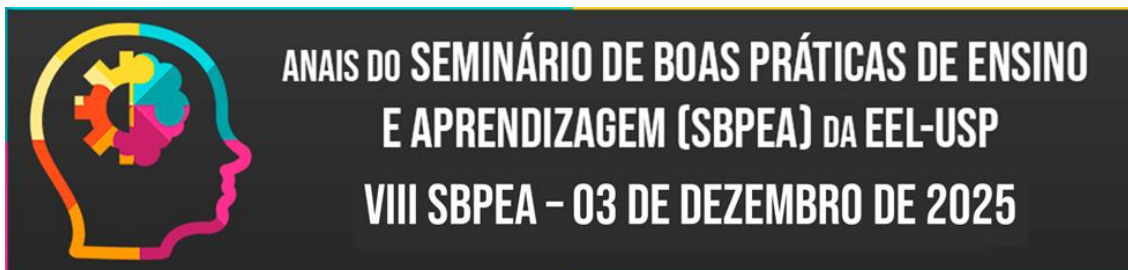
O cálculo do perímetro no Geoplano apresenta um desafio imediato: a medição de lados inclinados. A superação desse desafio se dá através da contextualização do Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$). Ao visualizar o lado inclinado como a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são as projeções nos eixos da malha, o estudante aplica o Teorema de Pitágoras não como uma regra isolada, mas como a fórmula da distância entre dois pontos. Isso retira o Teorema de sua abstração meramente algébrica e o insere em um contexto geométrico-analítico prático, permitindo o cálculo exato do perímetro, incluindo o trabalho com números irracionais (raízes) (Nova Escola, 2023).

A Fórmula de Pick é uma ferramenta poderosa para o cálculo de área de polígonos simples (sem auto intersecções) cujos vértices coincidem com pontos de um reticulado (malha). A fórmula é dada por $A = \frac{b}{2} + i - 1$, onde A é a área, b é o número de pontos (pinos) no contorno do polígono, e i é o número de pontos (pinos) no interior do polígono.

A metodologia proposta promove a dedução da fórmula por meio da investigação (SOUZA, 2013). Ao invés de receber a fórmula pronta, os estudantes a constroem (abordagem construtivista), observando a relação invariante entre A , b e i em diferentes polígonos. Este processo confere sentido e validade ao conhecimento, promovendo o pensamento indutivo e a generalização matemática.

A Fórmula de Pick simplifica o cálculo de áreas de polígonos irregulares complexos, que, de outra forma, exigiriam a decomposição em múltiplas figuras elementares, reforçando a elegância e a utilidade da Matemática.

2.3. A Ludicidade e o Cinestésico na Fixação



O encerramento do projeto com o Twister Matemático se baseia na importância do jogo e da abordagem cinestésica para a consolidação do aprendizado.

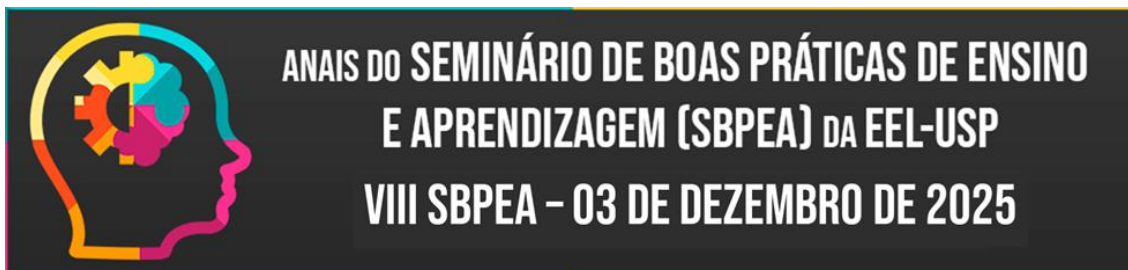
KISHIMOTO (2011) e ALMEIDA (1994) defendem que o jogo é um poderoso instrumento de desenvolvimento cognitivo, afetivo e social. No contexto do projeto, o jogo transforma a avaliação em um desafio prazeroso e motivador. A modalidade cinestésica (uso do corpo para alcançar o resultado do cálculo) promove uma fixação da memória de longo prazo (NUNES & SARACENI, 2017). Ao exigir cálculos rápidos sob pressão e mantendo o equilíbrio físico, o jogo atua como uma avaliação de proficiência, medindo a agilidade mental e o automatismo no uso das fórmulas (Pick e Pitágoras), indicando um domínio real do conteúdo que transcende a mera memorização. O sucesso no jogo é um indicador direto da consolidação dos conceitos.

3. MÉTODO

O método utilizado neste projeto de aplicação de conceitos de área e perímetro foi de natureza qualitativa e exploratória, baseado na sequência didática de quatro etapas interligadas, que guiaram os estudantes da manipulação concreta à aplicação lúdica e de alta complexidade conceitual. A abordagem priorizou a aprendizagem significativa e a metodologia ativa, transformando os alunos em agentes ativos de descoberta.

A experiência foi estruturada em uma progressão lógica, articulando o material manipulável (Geoplano) com a formalização matemática (fórmulas) e a fixação cinestésica (jogo).

Etapa	Foco Principal	Ferramentas	Produto de Aprendizagem
1	Perímetro e Pitágoras	Geoplano, Elásticos, Registro (Tabela)	Cálculo exato de perímetros em figuras irregulares (lados inclinados)



Etapa	Foco Principal	Ferramentas	Produto de Aprendizagem
2	Área e Fórmula de Pick	Geoplano, Registro de Variáveis (A, b, i)	Dedução/Confirmação da Fórmula de Pick
3	Preparação Lúdica	Confecção de Tapete e Cartas/Roleta	Kit pronto para avaliação de proficiência
4	Fixação e Avaliação	Jogo Twister Matemático	Demonstração de agilidade mental e proficiência no uso das fórmulas

O Geoplano, como material manipulável essencial, permitiu que os estudantes explorassem ativamente as formas geométricas de maneira tátil, facilitando a transição do conhecimento empírico para o formal.

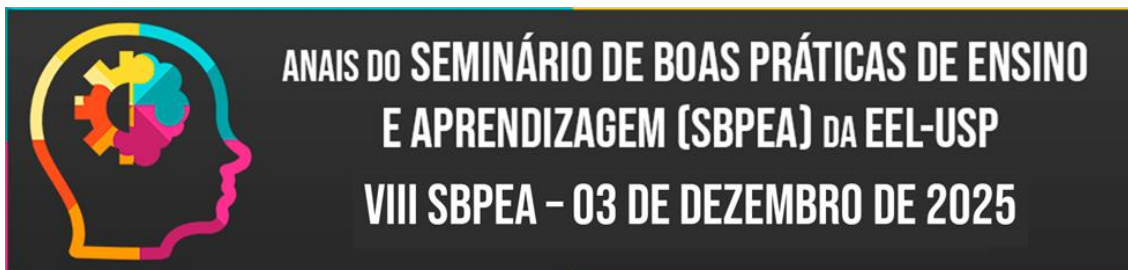
Esta abordagem prática é crucial, pois, o manuseio concreto permite ao estudante uma apreensão mais intuitiva e significativa dos conceitos.

3.1 Etapa 1: Perímetro – A Jornada no Contorno e a Aplicação do Teorema de Pitágoras

O foco inicial desta etapa foi estabelecer o conceito de perímetro como a soma das distâncias que delimitam o contorno de uma figura. A atividade se iniciou com a medição simples, onde a distância entre pinos adjacentes (horizontal ou vertical) foi definida como a unidade de medida padrão (1u).

3.1.1 Prática e Cálculo de Lados Inclinados:

O principal desafio pedagógico, e o momento de maior complexidade, concentrou-se nos lados inclinados dos polígonos irregulares. Foi orientado aos grupos a visualizassem o triângulo retângulo subjacente a cada segmento oblíquo, cujos catetos eram definidos pelas diferenças nas coordenadas dos pinos (Δx e Δy). Assim, a distância (Δd) — que representa o comprimento do lado inclinado e é parte fundamental do



perímetro — foi calculada pela aplicação direta da fórmula da distância, que é uma consequência geométrica do Teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

3.1.1 Articulação Teórica:

Esta prática articulou o concreto (o elástico esticado no Geoplano) com o abstrato (a fórmula), transformando o Teorema de Pitágoras, muitas vezes percebido como uma regra isolada, em uma ferramenta essencial e contextualizada para calcular o perímetro exato no plano. O registro detalhado de cada polígono construído, listando as coordenadas dos vértices e o cálculo do perímetro, incluindo o trabalho com notação de raízes, reforçou a precisão matemática e a conexão com o campo da Álgebra.

3.2 Etapa 2: Área – A Superfície e a Investigação da Fórmula de Pick

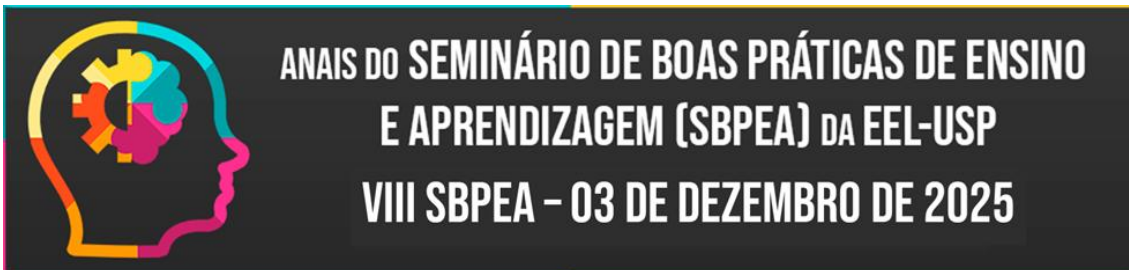
Esta etapa visou desenvolver o conceito de área como a medida da superfície interna, promovendo a dedução e a investigação matemática de fórmulas mais avançadas.

3.2.1 Área por Decomposição:

Inicialmente, para garantir a revisão dos conceitos básicos, a área de polígonos irregulares foi calculada pelo método de **decomposição** em figuras elementares (triângulos e retângulos), cujas fórmulas já eram conhecidas pelos estudantes. Este cálculo serviu como base para a etapa seguinte.

- Investigação (Fórmula de Pick): O aspecto mais inovador e investigativo da metodologia foi a atividade de descoberta. Os grupos foram desafiados a construir cinco polígonos distintos, cujas áreas já haviam sido confirmadas pela decomposição. Para cada um, registraram sistematicamente três variáveis: a Área (A), o número de pinos no Contorno (b) e o número de pinos no Interior (i). A partir da análise dessa relação de dados, os estudantes foram conduzidos ao desafio de deduzir ou confirmar a Fórmula de Pick, verificando que:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$



- Articulação Teórica: A condução da investigação promoveu o pensamento lógico, indutivo e dedutivo, alinhando-se a princípios da educação matemática que valorizam a construção do conhecimento em detrimento da mera memorização. A posterior utilização da Fórmula de Pick para calcular a área de um polígono complexo comprovou sua rapidez e precisão, reforçando a validade do conhecimento matemático e a capacidade de generalização de regras.

3.3 Consolidação Cinestésica: O Jogo Twister Matemático (Etapas 3 e 4)

As etapas finais transformaram a avaliação e a fixação do conteúdo em um momento de aplicação lúdica e de movimento, atendendo à necessidade de metodologias ativas e do uso do corpo no processo de aprendizagem.

3.3.1 Confeção e Preparação (Etapa 3)

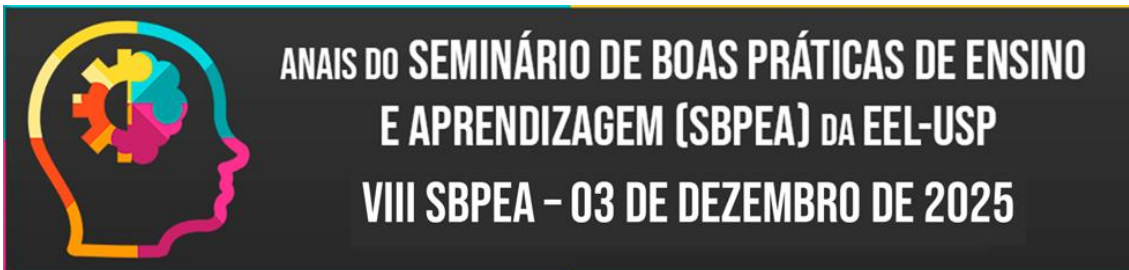
O Twister Matemático foi adaptado para ser o palco da avaliação de proficiência. Foi confeccionado um tapete grande (malha 4 x 4) com círculos numerados, e um conjunto de cartas/roleta foi preparado para ditar os desafios e o membro do corpo. As cartas variavam em complexidade, exigindo o domínio de todas as fórmulas aprendidas: desde perímetros simples e áreas por fórmulas básicas até desafios que exigiam a aplicação do Teorema de Pitágoras (lados inclinados) e da Fórmula de Pick (áreas de polígonos com b e i dados).

Exemplos de Desafios: Perímetro de triângulo retângulo com catetos 3 e 4 (cujo resultado, 12, exigia o conhecimento da hipotenusa, 5) ou "Área de Pick com $b = 10$ e $i = 3$ " (resultado 7).

3.3.2 O Jogo (Etapa 4) – Aplicação Lúdica e Proficiência

O Jogo foi o ápice da experiência. Os alunos, jogando em duplas (um "calculista" e um "jogador" no tapete), eram forçados a realizar cálculos rápidos e precisos.

- Processo de Aplicação: O juiz (professor ou estudante) sorteava o desafio e o membro do corpo (exemplo, mão direita). A resolução do desafio (cálculo de área ou perímetro) gerava um resultado numérico (exemplo 12) que correspondia ao círculo onde o estudante deveria se posicionar.



- Articulação Teórica e Avaliação: A modalidade cinestésica e o desafio do jogo promoveram uma fixação mais duradoura e engajadora dos conceitos. A pressão do tempo e a necessidade de manter o equilíbrio físico exigiram que os estudantes demonstrassem proficiência, agilidade mental e automatismo nos cálculos, servindo como uma avaliação formativa e somativa de alto valor. O sucesso no jogo estava diretamente ligado ao domínio dos conceitos adquiridos com o Geoplano.

4. RESULTADOS

A aplicação do projeto pedagógico, que articulou o Geoplano e o Twister Matemático, resultou na consolidação de conceitos complexos de geometria, demonstrando eficácia em três áreas principais: conexão conceitual, proficiência no cálculo e engajamento dos estudantes.

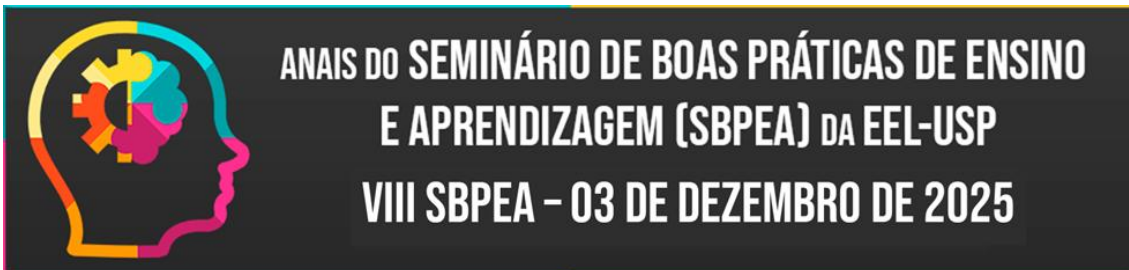
4.1. Conexão Concreto-Abstrato e Inclusão Conceitual

Os resultados nas Etapas 1 e 2 (Geoplano) comprovaram o sucesso na construção de uma base conceitual robusta e na superação da abstração inerente à Geometria formal.

Os alunos conseguiram visualizar e distinguir de forma clara e tátil os conceitos de área (superfície interna) e perímetro (contorno), superando uma dificuldade comum na aprendizagem.

A aplicação do Teorema de Pitágoras para calcular lados inclinados foi bem-sucedida. Os registros dos estudantes demonstraram que a fórmula da distância foi assimilada não como uma regra isolada, mas como uma ferramenta prática para medir contornos exatos no plano, incluindo o manejo correto de raízes inexatas.

A metodologia de investigação guiada levou os grupos a deduzirem ou confirmarem a Fórmula de Pick, $A = \frac{b}{2} + i - 1$. O teste final da fórmula em polígonos complexos comprovou sua eficiência e precisão, validando a capacidade dos alunos de generalizar regras matemáticas.



4.2. Proficiência e Automatismo no Cálculo (Twister)

O Jogo Twister Matemático (Etapa 4) atuou como um indicador de proficiência de alto valor, medindo a fluidez e a aplicação do conhecimento sob pressão.

Os estudantes demonstraram proficiência e agilidade mental nos cálculos. A pressão da competição e a necessidade de manter o equilíbrio exigiram que eles alcançassem um automatismo nos cálculos, sendo capazes de aplicar as Fórmulas de Pick e Pitágoras de forma rápida para determinar o resultado numérico correto (o alvo no tapete).

A modalidade cinestésica (vincular o resultado do cálculo à ação física de posicionar um membro) promoveu uma fixação de memória duradoura. O sucesso no jogo estava diretamente ligado ao domínio dos conceitos construídos com o Geoplano, validando a eficácia da sequência metodológica.

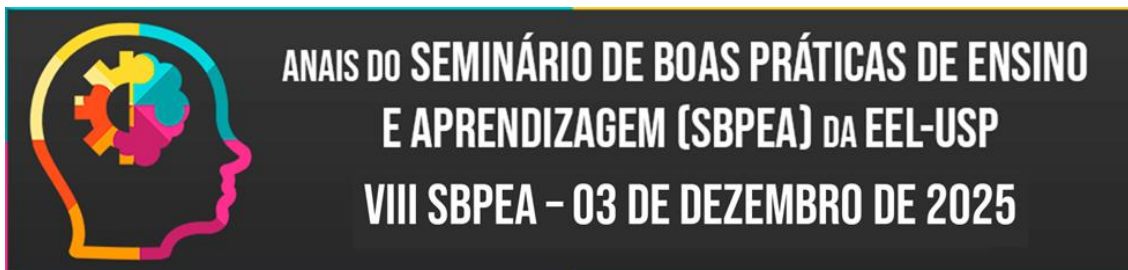
4.3. Engajamento e Impacto Atitudinal

A metodologia lúdica e ativa elevou significativamente o engajamento e a percepção dos estudantes sobre a Matemática.

A integração do jogo e do movimento transformou a disciplina, frequentemente vista como "dura", em um desafio prazeroso e motivador. O Twister serviu como uma prática pedagógica equitativa, oferecendo uma via de demonstração de conhecimento que transcendeu a prova escrita tradicional, permitindo que alunos com diferentes estilos de aprendizagem demonstrassem sua fluidez conceitual. A autoavaliação conceitual final confirmou o impacto positivo do Geoplano e do Twister na percepção dos estudantes sobre a importância, aplicabilidade e acessibilidade da Geometria.

5. DISCUSSÕES

As discussões do projeto pedagógico, que envolveu o uso do Geoplano e do Twister Matemático, se concentram na validação das metodologias ativas e lúdicas para a



Geometria, na complexidade conceitual abordada e nas implicações para a avaliação da proficiência.

O uso do Geoplano se estabeleceu como uma decisão pedagógica crucial e eficaz, confirmando as teses de teóricos como LORENZATO (2006). A manipulação tátil permitiu que os estudantes superassem a abstração da Geometria plana. O Geoplano funcionou como um mediador entre a figura desenhada no papel e o conceito tridimensional/espacial, facilitando a internalização da diferença entre área (superfície delimitada) e perímetro (contorno).

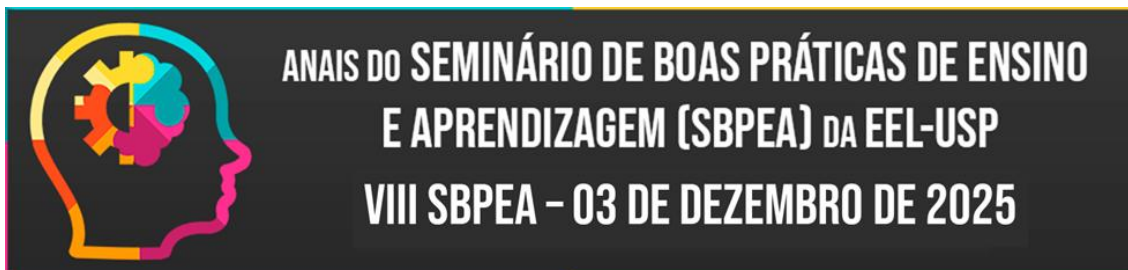
A discussão fundamental aqui é a contextualização do Teorema de Pitágoras. Ao ser aplicado para calcular o comprimento exato de lados inclinados no Geoplano (atuando como a fórmula da distância), o Teorema é retirado de seu contexto meramente algébrico e inserido em uma perspectiva geométrica-analítica. Isso transformou Pitágoras de uma "fórmula a ser decorada" em uma ferramenta prática e essencial para a precisão do cálculo, reforçando a conexão com a Álgebra (trabalho com raízes inexatas).

5.2. O Pensamento Lógico-Indutivo e a Fórmula de Pick

A introdução da Fórmula de Pick por meio da investigação guiada é um dos pontos mais inovadores e discutíveis do projeto. Em vez de receber a fórmula pronta, a metodologia adotou um enfoque construtivista. A investigação da relação entre Área (A), pinos no Contorno (b) e pinos no Interior (i) estimulou o pensamento lógico-indutivo. A dedução da fórmula $A = \frac{b}{2} + i - 1$ pelos próprios alunos atribuiu um sentido intrínseco e validade ao conhecimento, um resultado superior à simples memorização.

A discussão reside na capacidade de estudantes da educação básica assimilarem a generalização de uma fórmula avançada como a de Pick. O projeto demonstrou que, com a mediação do material concreto e a estruturação adequada (decomposição como base), a introdução de conceitos mais complexos é viável e enriquecedora.

5.3. O Jogo Lúdico como Instrumento de Avaliação de Proficiência



O Twister Matemático é o ponto de maior discussão metodológica, pois transcende o papel de simples passatempo. A modalidade lúdico-cinestésica promoveu uma fixação de memória de longo prazo mais robusta. A exigência de vincular um cálculo complexo (área via Pick) a uma ação corporal (colocar o pé no resultado) criou uma associação cognitiva e motora que reforçou a retenção do conteúdo.

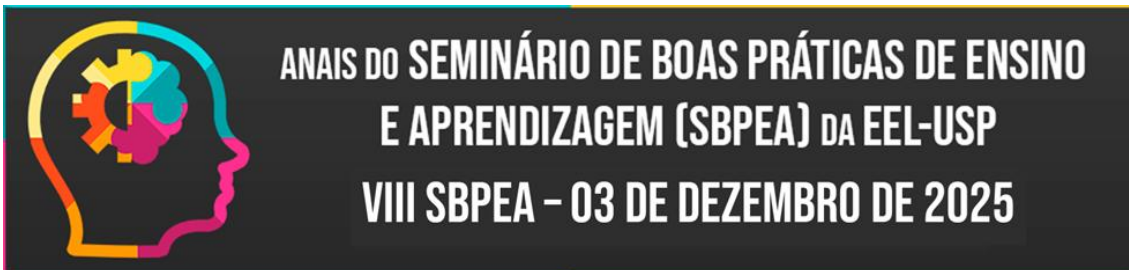
O jogo transformou a avaliação em um teste de proficiência e agilidade mental. A pressão do tempo e do equilíbrio exigiu que os alunos demonstrassem automatismo no uso das fórmulas, ou seja, a capacidade de aplicá-las rapidamente e sem hesitação, o que é um indicador superior de domínio do que a resolução em papel sem pressão.

O projeto levanta a discussão sobre a necessidade de diversificar os métodos avaliativos. O Twister provou ser um instrumento de avaliação formativa e somativa que mede a fluidez e a aplicação imediata do conhecimento, oferecendo uma via mais equitativa para que alunos com diferentes estilos de aprendizagem demonstrem sua competência. O sucesso no jogo é, portanto, diretamente proporcional à internalização dos conceitos do Geoplano.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A vivência do projeto validou a hipótese de que a articulação entre o material manipulável (Geoplano) e a atividade lúdico-cinestésica (Twister Matemático) é altamente eficaz para a aprendizagem significativa de conceitos complexos em Geometria. As principais conclusões são:

1. **Conexão Concreto-Abstrato e Inclusão Conceitual:** O Geoplano não apenas facilitou a visualização da distinção entre área e perímetro, mas também permitiu a introdução prática de conceitos avançados, como o Teorema de Pitágoras para o cálculo exato de lados inclinados e a Fórmula de Pick por meio da investigação guiada.
2. **Proficiência e Automatismo no Cálculo:** O Jogo Twister atuou como um dispositivo de avaliação aplicada único. Ao exigir que os estudantes calculassem



rapidamente (área com Pick ou perímetro com Pitágoras) sob a pressão da competição e do equilíbrio físico, a experiência promoveu a fixação cinestésica dos resultados e o desenvolvimento do automatismo mental, que são indicadores de proficiência conceitual. O sucesso no jogo estava diretamente ligado ao domínio do conhecimento construído nas etapas do Geoplano.

3. Engajamento e Atitude Positiva: A metodologia lúdica e de movimento elevou significativamente o engajamento dos estudantes, transformando a disciplina, muitas vezes percebida como "dura" ou "chata", em um desafio prazeroso. A autoavaliação final confirmou o impacto positivo do Geoplano e do Twister na percepção dos estudantes sobre a importância e aplicabilidade da Matemática.

O projeto propõe um modelo de sequência didática bem definida (Manuseio → Cálculo → Fixação) que integrou o tátil (Geoplano), o formal (Fórmulas de Pick e Pitágoras) e o corporal (Twister). Este modelo pode ser replicado e adaptado para o ensino de outros tópicos matemáticos, servindo como base para estudos de caso sobre a eficácia de metodologias ativas e gamificadas.

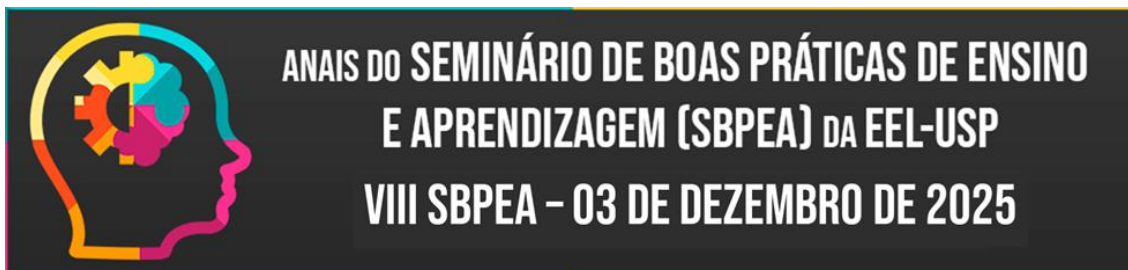
O relato forneceu evidências empíricas sobre a viabilidade e o impacto da introdução precoce da Fórmula de Pick e da aplicação contextualizada do Teorema de Pitágoras para lados inclinados, utilizando materiais de baixo custo.

O uso do jogo Twister como instrumento de avaliação de proficiência (conceitual e de cálculo) contribuiu para a discussão sobre a necessidade de diversificar os métodos avaliativos, incluindo a dimensão corporal (cinestésica) para medir a fluidez e a aplicação do conhecimento, e não apenas a capacidade de reproduzir passos em papel.

Além disso, o modelo pode ser adaptado para o ensino de volumes e áreas de superfície de sólidos geométricos, explorando outros materiais manipuláveis e jogos de movimento.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**. São Paulo: Loyola, 1994.



BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NUNES, D.; SARACENI, M. O lúdico no Ensino da Matemática. **Revistas PUC-SP**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 55-66, dez. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/28830>

VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VERSÃO EM INGLÊS:

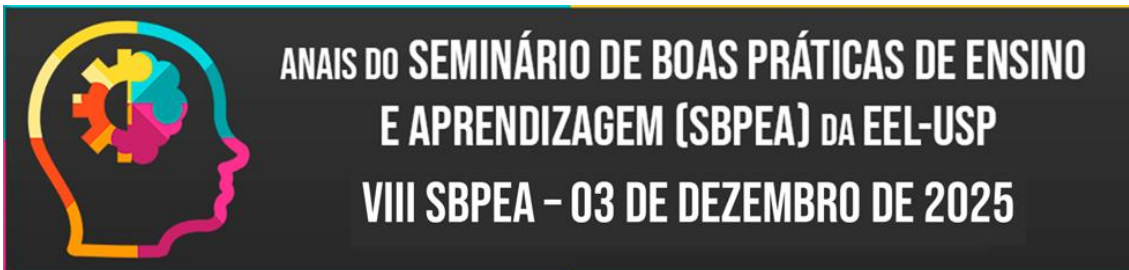
1. INTRODUCTION

This experience report describes an innovative and equitable pedagogical practice developed with the goal of applying the concepts of area and perimeter of plane figures, exploring their representation on the Geoboard and concluding with a playful and kinesthetic game.

The proposal aims to overcome the traditional approach, often abstract and decontextualized, which typically leads to learning difficulties in Geometry. This experience sought to promote meaningful learning by transforming the student into an active agent of their own knowledge construction.

The pedagogical work is based on theoretical pillars that emphasize the importance of concreteness and manipulation in teaching Geometry, as advocated by various authors who stress the value of tactile resources like the Geoboard for developing spatial thinking and studying the properties of plane figures. Furthermore, the strategy integrates playfulness and the kinesthetic approach (Mathematical Twister) for concept consolidation, aligning with references that highlight games as a powerful instrument for cognitive, affective, and social development, capable of making Mathematics more enjoyable, accessible, and challenging.

The specific objectives outlined the learning journey, which included:



- (1) Handling the Geoboard to visualize and distinguish between area (surface) and perimeter (boundary).
- (2) Calculating perimeters, using the Pythagorean Theorem for slanted sides, and calculating areas of irregular polygons using Pick's Formula.
- (3) Fixation and consolidation of concepts with the Mathematical Twister game.

2. THEORETICAL BACKGROUND

The pedagogical practice described in the project is founded on robust pillars of Mathematics Education that champion meaningful learning through concrete manipulation, active investigation, and playful engagement.

2.1. Manipulative Material as a Knowledge Mediator: The Geoboard

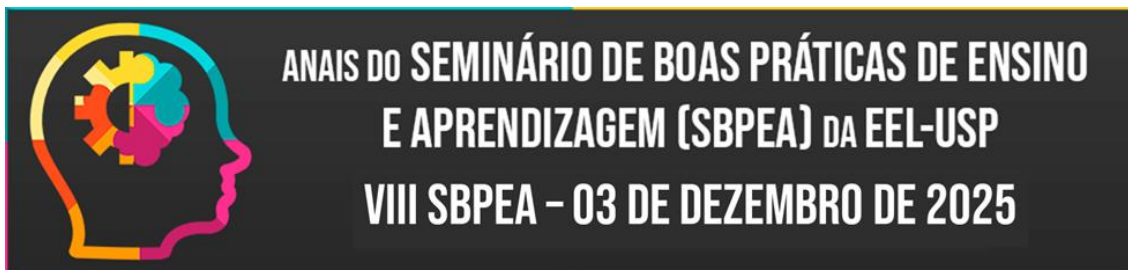
The Geoboard, created by Caleb Gattegno in 1961, is the central teaching resource, acting as a powerful manipulative material that facilitates the transition from empirical to formal knowledge in Geometry. Authors like Lorenzato (2006) and the Brazilian National Curriculum Parameters (PCN) emphasize that handling objects is essential for building spatial thinking. The Geoboard allows students to touch and build shapes, visualizing the fundamental difference between perimeter (the boundary, the elastic band) and area (the internal surface), concepts often confused in a purely abstract approach. The Geoboard is not merely for illustration, but for investigation (MENEZES, 2008). Its grid pattern, which resembles a Cartesian plane, allows students to observe patterns, formulate hypotheses, and systematically record data, a crucial process for the active construction of knowledge.

2.2. Formal Articulation of Advanced Concepts

The project innovates by introducing tools from Analytical Geometry and Special Topics in Mathematics to ensure calculation accuracy and students' ability to generalize.

Calculating the perimeter on the Geoboard presents an immediate challenge: measuring slanted sides. This challenge is overcome by contextualizing the Pythagorean Theorem ($a^2 = b^2 + c^2$). By visualizing the slanted side as the hypotenuse of a right triangle whose legs are the projections on the grid axes, the student applies the Pythagorean Theorem not as an isolated rule, but as the distance formula between two points. This removes the Theorem from its purely algebraic abstraction and embeds it in a practical geometric-analytical context, allowing for the exact calculation of the perimeter, including work with irrational numbers (roots) (Nova Escola, 2023).

Pick's Formula is a powerful tool for calculating the area of simple polygons (without self-intersections) whose vertices coincide with the points of a lattice (grid). The formula



is given by $A = \frac{b}{2} + i - 1$, where A is the area, b is the number of pegs on the boundary of the polygon, and i is the number of pegs in the interior of the polygon.

The proposed methodology promotes the deduction of the formula through investigation (SOUZA, 2013). Instead of receiving the formula pre-made, students construct it (a constructivist approach) by observing the invariant relationship between A , b , and i across different polygons. This process gives intrinsic meaning and validity to the knowledge, promoting inductive reasoning and mathematical generalization.

Pick's Formula simplifies the calculation of areas for complex irregular polygons that would otherwise require decomposition into multiple elementary figures, reinforcing the elegance and utility of Mathematics.

2.3. Playfulness and Kinesthetics for Fixation

The project's conclusion with the Mathematical Twister is based on the importance of games and the kinesthetic approach for learning consolidation.

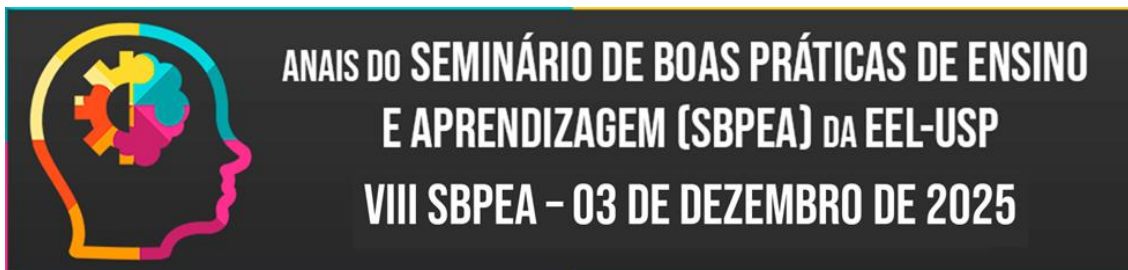
KISHIMOTO (2011) and ALMEIDA (1994) argue that games are a powerful instrument for cognitive, affective, and social development. In this project, the game transforms assessment into an enjoyable and motivating challenge.

The kinesthetic mode (using the body to reach the calculated result) promotes a more durable long-term memory fixation (NUNES & SARACENI, 2017). By requiring fast calculations under pressure while maintaining physical balance, the game acts as a proficiency assessment, measuring mental agility and automaticity in using the formulas (Pick and Pythagoras), indicating a real mastery of the content that goes beyond mere memorization. Success in the game is a direct indicator of concept consolidation.

3. METHOD

The method employed in this project for applying area and perimeter concepts was qualitative and exploratory in nature, based on a sequential teaching strategy of four interconnected stages that guided students from concrete manipulation to playful application of high conceptual complexity. The approach prioritized meaningful learning and active methodology, turning students into active agents of discovery.

The experience was structured in a logical progression, articulating the manipulative material (Geoboard) with mathematical formalization (formulas) and kinesthetic fixation (game).



Stage	Main Focus	Tools	Learning Outcome
1	Perimeter and Pythagoras	Geoboard, Rubber Bands, Record Sheet (Table)	Exact calculation of perimeters for irregular figures (slanted sides)
2	Area and Pick's Formula	Geoboard, Variable Recording (\$A, b, i\$)	Deduction/Confirmation of Pick's Formula
3	Playful Preparation	Creation of Mat and Cards/Spinner	Ready-to-use kit for proficiency assessment
4	Fixation and Assessment	Mathematical Twister Game	Demonstration of mental agility and proficiency in using formulas

The Geoboard, as essential manipulative material, allowed students to actively explore geometric shapes in a tactile manner, facilitating the transition from empirical to formal knowledge. This practical approach is crucial because concrete handling allows the student a more intuitive and meaningful grasp of concepts.

Stage 1: Perimeter – The Journey on the Boundary and the Application of the Pythagorean Theorem

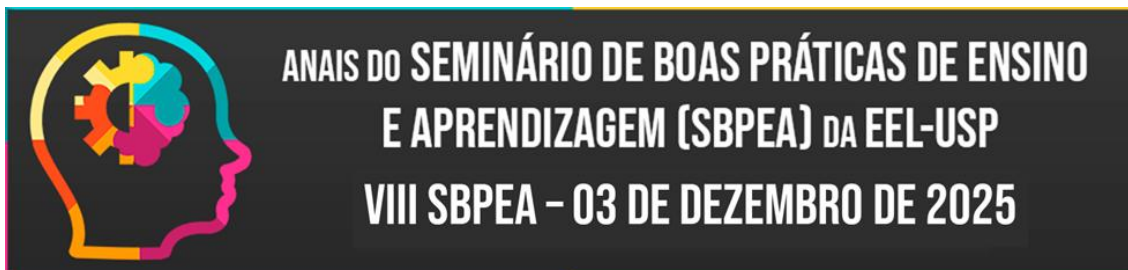
The initial focus was establishing the concept of perimeter as the sum of the distances defining the figure's boundary. The activity began with simple measurement, where the distance between adjacent pegs (horizontal or vertical) was defined as the standard unit of measure (1u).

Practice and Calculation of Slanted Sides:

The main pedagogical challenge, and the moment of greatest complexity, focused on the slanted sides of irregular polygons. Groups were guided to visualize the underlying right triangle for each oblique segment, whose legs were defined by the differences in the pegs' coordinates (Δx e Δy). Thus, the distance (Δd)—which represents the length of the slanted side and is a fundamental part of the perimeter—was calculated by the direct application of the distance formula, a geometric consequence of the Pythagorean Theorem:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

This practice articulated the concrete (the stretched elastic band on the Geoboard) with the abstract (the formula), transforming the Pythagorean Theorem into an essential, contextualized tool for calculating the exact perimeter in the plane. Detailed recording of each constructed polygon, listing vertex coordinates and perimeter calculation, including



work with root notation, reinforced mathematical precision and the connection to Algebra.

Stage 2: Area – The Surface and the Investigation of Pick's Formula

This stage aimed to develop the concept of area as the measure of the internal surface, promoting the deduction and mathematical investigation of more advanced formulas.

Initially, to ensure the review of basic concepts, the area of irregular polygons was calculated using the method of decomposition into elementary figures (triangles and rectangles), whose formulas were already known to the students. This calculation served as the baseline for the next step.

The most innovative and investigative aspect of the methodology was the discovery activity. Groups were challenged to construct five distinct polygons whose areas had already been confirmed by decomposition. For each, they systematically recorded three variables: the Area (A), the number of Boundary pegs (b), and the number of Interior pegs (i). By analyzing this data relationship, students were guided to the challenge of deducing or confirming Pick's Formula, verifying that:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

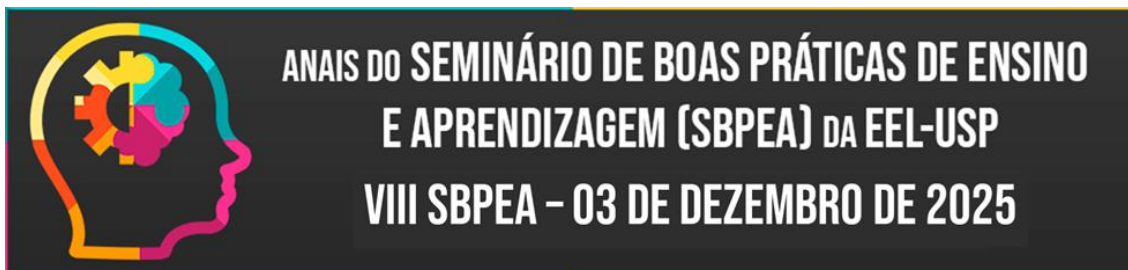
The execution of the investigation promoted logical, inductive, and deductive reasoning, aligning with mathematical education principles that value knowledge construction over mere memorization. The subsequent use of Pick's Formula to calculate the area of a complex polygon proved its speed and precision, reinforcing the validity of mathematical knowledge and the capacity for rule generalization.

Kinesthetic Consolidation: The Mathematical Twister Game (Stages 3 and 4)

The final stages transformed the assessment and concept fixation into a moment of playful application and movement, addressing the need for active methodologies and the use of the body in the learning process.

Preparation (Stage 3):

The Mathematical Twister was adapted to be the stage for proficiency assessment. A large mat (4 x 4 grid) with numbered circles was made, and a set of cards/spinner was prepared to dictate the challenges and the body part. The cards varied in complexity, requiring mastery of all learned formulas: from simple perimeters and basic area formulas to challenges requiring the application of the Pythagorean Theorem (slanted sides) and Pick's Formula (areas of polygons with given b and i).



Perimeter of a right triangle with legs 3 and 4 (whose result, 12, required knowledge of the hypotenuse, 5) or "Pick's Area with $b = 10$ and $i = 3$ " (result 7).

The Game (Stage 4) – Playful Application and Proficiency:

The Game was the climax of the experience. Students, playing in pairs (one "calculator" and one "player" on the mat), were forced to perform fast and accurate calculations.

- Application Process: The judge (teacher or student) would draw the challenge and the body part (e.g., right hand). Solving the challenge (calculating area or perimeter) yielded a numerical result (e.g., 12) which corresponded to the circle where the student had to position themselves.

- Theoretical Articulation and Assessment: The kinesthetic modality and the challenge of the game promoted a more durable and engaging fixation of the concepts. The time pressure and the need to maintain physical balance required the students to demonstrate proficiency, mental agility, and automaticity in calculations, serving as a high-value formative and summative assessment. Success in the game was directly linked to the mastery of concepts acquired with the Geoboard.

4. RESULTS

The application of the pedagogical project, which articulated the Geoboard and Mathematical Twister, resulted in the consolidation of complex geometry concepts, demonstrating effectiveness in three main areas: conceptual connection, calculation proficiency, and student engagement.

4.1. Concrete-Abstract Connection and Conceptual Inclusion

The results from Stages 1 and 2 (Geoboard) confirmed the success in building a robust conceptual foundation and overcoming the abstraction inherent in formal Geometry.

Students were able to visually distinguish clearly and tactilely the concepts of area (internal surface) and perimeter (boundary), overcoming a common learning difficulty.

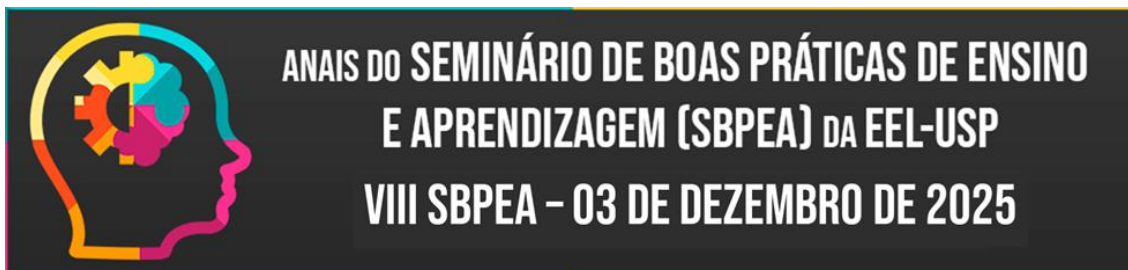
The application of the Pythagorean Theorem to calculate slanted sides was successful. Student records demonstrated that the distance formula was assimilated not as an isolated rule but as a practical tool for measuring exact boundaries in the plane, including the correct handling of irrational roots.

The guided investigation methodology led groups to deduce or confirm Pick's Formula

$$A = \frac{b}{2} + i - 1.$$

The final test of the formula on complex polygons proved its efficiency

and accuracy, validating the students' capacity to generalize mathematical rules.



4.2. Proficiency and Automaticity in Calculation (Twister)

The Mathematical Twister Game (Stage 4) served as a high-value proficiency indicator, measuring the fluency and application of knowledge under pressure.

Students demonstrated proficiency and mental agility in calculations. The pressure of the competition and the need to maintain balance required them to achieve automaticity in calculations, being able to apply Pick's and Pythagorean Formulas quickly to determine the correct numerical result (the target on the mat).

The kinesthetic modality (linking the calculation result to the physical action of positioning a limb) promoted durable memory fixation. Success in the game was directly linked to the mastery of concepts built with the Geoboard, validating the effectiveness of the methodological sequence.

4.3. Engagement and Attitudinal Impact

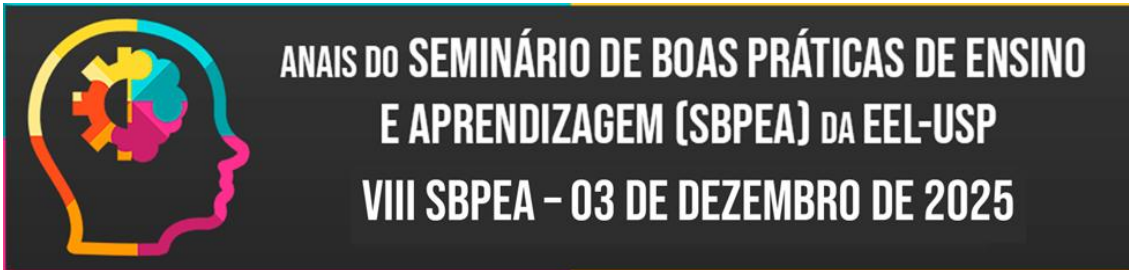
The playful and active methodology significantly boosted student engagement and their perception of Mathematics. The integration of the game and movement transformed the discipline, often seen as "hard," into an enjoyable and motivating challenge. Twister served as an equitable pedagogical practice, offering an avenue for knowledge demonstration that transcended the traditional written test, allowing students with different learning styles to show their conceptual fluency. The final conceptual self-assessment confirmed the positive impact of the Geoboard and Twister on students' perception of the importance, applicability, and accessibility of Geometry.

5. DISCUSSION

The discussions of the pedagogical project focus on the validation of active and playful methodologies for Geometry, the conceptual complexity addressed, and the implications for proficiency assessment.

The use of the Geoboard proved to be a crucial and effective pedagogical decision, confirming the theses of theorists like LORENZATO (2006). The tactile manipulation allowed students to overcome the abstraction of plane Geometry.

The fundamental discussion here is the contextualization of the Pythagorean Theorem. By being applied to calculate the exact length of slanted sides on the Geoboard (acting as the distance formula), the Theorem is removed from its merely algebraic context and embedded in a geometric-analytical perspective. This transformed Pythagoras from a "formula to be memorized" into a practical and essential tool for calculation precision.



The introduction of Pick's Formula through guided investigation is one of the most innovative points. Adopting a constructivist focus, the investigation of the relationship between Area (A), boundary pegs (B), and interior pegs (I) stimulated logical-inductive reasoning. The deduction of the formula by the students themselves provided intrinsic meaning and validity to the knowledge, a superior result to simple memorization. The project demonstrated that, with the mediation of concrete material, the introduction of more complex concepts is viable and enriching.

The Mathematical Twister transcends the role of a simple pastime. The kinesthetic mode promoted a more robust, long-term memory fixation. The game transformed assessment into a test of proficiency and mental agility. The pressure of time and balance required students to demonstrate automaticity in using the formulas, which is a superior indicator of mastery than paper-based resolution without pressure. The project raises the discussion about the need to diversify assessment methods, as Twister proved to be a formative and summative instrument that measures the fluency and immediate application of knowledge.

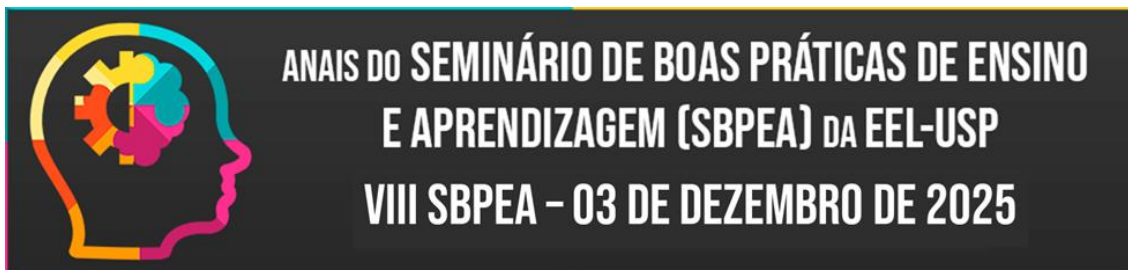
6. FINAL CONSIDERATIONS

The project experience validated the hypothesis that the articulation between manipulative material (Geoboard) and kinesthetic-playful activity (Mathematical Twister) is highly effective for the meaningful learning of complex concepts in Geometry.

Key Takeaways:

- Concrete-Abstract Connection and Conceptual Inclusion: The Geoboard facilitated visualization and practical introduction of advanced concepts like the Pythagorean Theorem (for slanted sides) and Pick's Formula (through guided investigation).
- Proficiency and Calculation Automaticity: The Twister Game acted as a unique applied assessment device. By demanding rapid calculations under physical pressure and competition, the experience fostered kinesthetic fixation and the development of mental automaticity, which are robust indicators of conceptual proficiency.
- Engagement and Positive Attitude: The playful and movement-based methodology significantly increased student engagement, confirming the positive impact of active methodologies on students' perception of the importance and applicability of Mathematics.

The project proposes a well-defined sequence model (Handling $\rightarrow$ Calculation $\rightarrow$ Fixation) that integrated the tactile (Geoboard), the formal (Pick's and Pythagorean Formulas), and the corporal (Twister). This model is replicable for teaching other mathematical topics. The report provided empirical evidence on the viability and impact



of the early introduction of Pick's Formula and the contextualized application of the Pythagorean Theorem using low-cost materials. The use of the Twister game as a proficiency assessment tool contributes to the discussion on the need to diversify evaluation methods, including the kinesthetic dimension to measure the fluency and application of knowledge.

REFERENCES

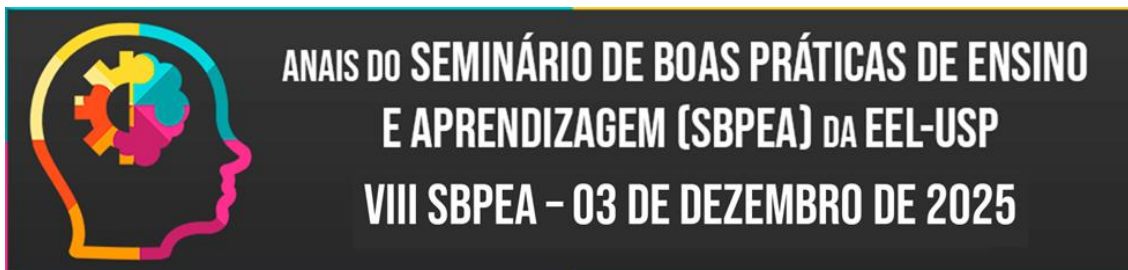
- ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**. São Paulo: Loyola, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>
- KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- NUNES, D.; SARACENI, M. O lúdico no Ensino da Matemática. **Revistas PUC-SP**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 55-66, dez. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/28830>
- VIGOTSKI, Lev Semenovich. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VERSÃO EM ESPANHOL:

1. INTRODUCCIÓN

El presente relato de experiencia describe una práctica pedagógica innovadora y equitativa desarrollada con el objetivo de aplicar los conceptos de área y perímetro de figuras planas, explorando su representación en el Geoplano y finalizando con un juego lúdico y cinestésico.

La propuesta busca superar el enfoque tradicional, frecuentemente abstracto y descontextualizado, que genera dificultades de aprendizaje en Geometría. La vivencia buscó promover un aprendizaje significativo, transformando al estudiante en agente activo de su propio conocimiento.



El trabajo pedagógico se sustenta en pilares teóricos que destacan la importancia de la concretud y manipulación en la enseñanza de la Geometría, como defienden diversos autores que resaltan el valor de recursos táctiles como el Geoplano para la construcción del pensamiento espacial y el estudio de propiedades de figuras planas. Además, la estrategia integra la ludicidad y el enfoque cinestésico (Twister Matemático) para la fijación de conceptos, alineándose a referentes que señalan el juego como un poderoso instrumento de desarrollo cognitivo, afectivo y social, capaz de hacer la Matemática más placentera, accesible y desafiante.

Los objetivos específicos delinearon la jornada de aprendizaje, tales como:

- (1) Manejo del Geoplano para la visualización y distinción entre área (superficie) y perímetro (contorno).
- (2) Cálculo de perímetros, utilizando el Teorema de Pitágoras para lados inclinados, y de áreas de polígonos irregulares mediante la Fórmula de Pick.
- **(3) Fijación y consolidación de los conceptos con el juego Twister Matemático.**

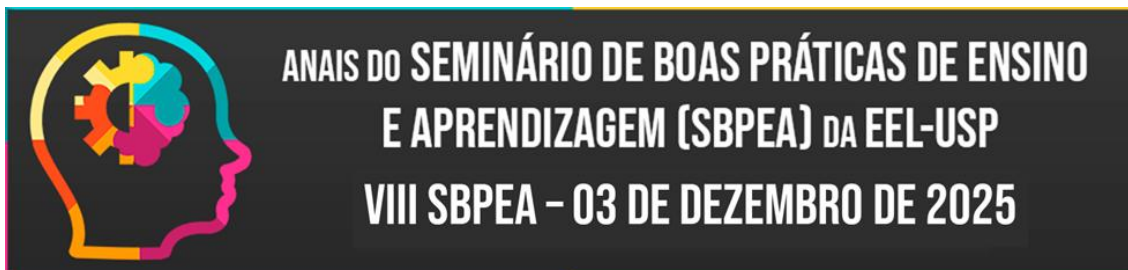
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La práctica pedagógica descrita en el proyecto se fundamenta en pilares robustos de la Educación Matemática que defienden el aprendizaje significativo a través de la manipulación concreta, la investigación activa y el compromiso lúdico.

2.1. El Material Manipulable como Mediador del Conocimiento: El Geoplano

El Geoplano, creado por Caleb Gattegno en 1961, es el recurso didáctico central, actuando como un poderoso material manipulable que facilita la transición del conocimiento empírico al formal en Geometría.

Autores como Lorenzato (2006) y los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN) resaltan que el manejo de objetos es esencial para la construcción del pensamiento espacial. El Geoplano permite a los estudiantes tocar y construir las formas, visualizando



la diferencia fundamental entre perímetro (el contorno, la liga) y área (la superficie interna), conceptos frecuentemente confundidos en el enfoque puramente abstracto.

El Geoplano no sirve solo para ilustración, sino para la investigación (MENEZES, 2008). Su cuadrícula, que remite a un plano cartesiano, posibilita que los estudiantes observen patrones, formulen hipótesis y registren datos de forma sistemática, un proceso crucial para la construcción activa del conocimiento.

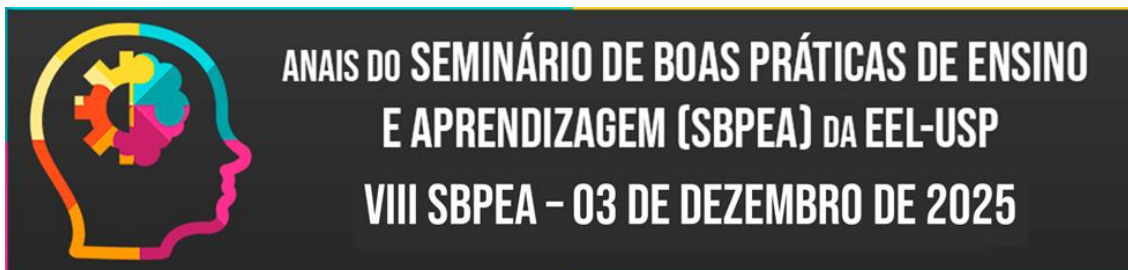
2.2. La Articulación Formal de los Conceptos Avanzados

El proyecto innova al introducir herramientas de Geometría Analítica y Tópicos Especiales de la Matemática para garantizar la precisión de los cálculos y la capacidad de generalización de los alumnos.

El cálculo del perímetro en el Geoplano presenta un desafío inmediato: la medición de lados inclinados. La superación de este desafío se logra a través de la contextualización del Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$). Al visualizar el lado inclinado como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son las proyecciones en los ejes de la cuadrícula, el estudiante aplica el Teorema de Pitágoras no como una regla aislada, sino como la fórmula de la distancia entre dos puntos. Esto retira el Teorema de su abstracción meramente algebraica y lo inserta en un contexto geométrico-analítico práctico, permitiendo el cálculo exacto del perímetro, incluyendo el trabajo con números irracionales (raíces) (Nova Escola, 2023).

La Fórmula de Pick es una herramienta poderosa para el cálculo de área de polígonos simples (sin autointersecciones) cuyos vértices coinciden con puntos de una retícula (cuadrícula). La fórmula es dada por $A = \frac{b}{2} + i - 1$ donde A es el área, b es el número de puntos (clavos) en el contorno del polígono, e i es el número de puntos (clavos) en el interior del polígono.

La metodología propuesta promueve la deducción de la fórmula por medio de la investigación (SOUZA, 2013). En lugar de recibir la fórmula preestablecida, los estudiantes la construyen (enfoque constructivista), observando la relación invariante



entre A, b e i en diferentes polígonos. Este proceso confiere sentido y validez al conocimiento, promoviendo el pensamiento inductivo y la generalización matemática.

La Fórmula de Pick simplifica el cálculo de áreas de polígonos irregulares complejos, que, de otra forma, exigirían la descomposición en múltiples figuras elementales, reforzando la elegancia y la utilidad de la Matemática.

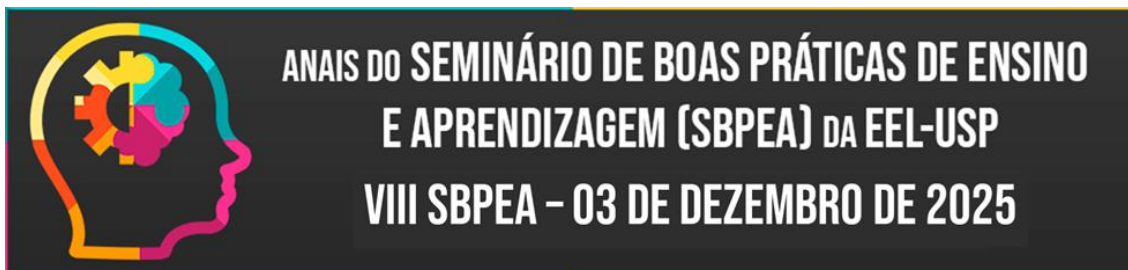
2.3. La Ludicidad y el Cinestésico en la Fijación

El cierre del proyecto con el Twister Matemático se basa en la importancia del juego y del enfoque cinestésico para la consolidación del aprendizaje.

KISHIMOTO (2011) y ALMEIDA (1994) defienden que el juego es un poderoso instrumento de desarrollo cognitivo, afectivo y social. En el contexto del proyecto, el juego transforma la evaluación en un desafío placentero y motivador. La modalidad cinestésica (uso del cuerpo para alcanzar el resultado del cálculo) promueve una fijación de la memoria a largo plazo (NUNES & SARACENI, 2017). Al exigir cálculos rápidos bajo presión y manteniendo el equilibrio físico, el juego actúa como una evaluación de competencia, midiendo la agilidad mental y el automatismo en el uso de las fórmulas (Pick y Pitágoras), indicando un dominio real del contenido que trasciende la mera memorización. El éxito en el juego es un indicador directo de la consolidación de los conceptos.

3. MÉTODO

El método utilizado en este proyecto de aplicación de conceptos de área y perímetro fue de naturaleza cualitativa y exploratoria, basado en la secuencia didáctica de cuatro etapas interconectadas, que guiaron a los estudiantes de la manipulación concreta a la aplicación lúdica y de alta complejidad conceptual. El enfoque priorizó el aprendizaje significativo y la metodología activa, transformando a los alumnos en agentes activos de descubrimiento.



La experiencia fue estructurada en una progresión lógica, articulando el material manipulable (Geoplano) con la formalización matemática (fórmulas) y la fijación cinestésica (juego).

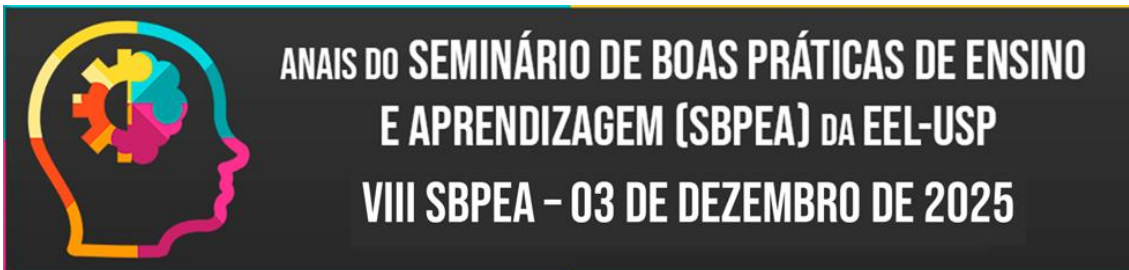
Etapas	Foco Principal	Herramientas	Producto de Aprendizaje
1	Perímetro y Pitágoras	Geoplano, Ligas, Registro (Tabla)	Cálculo exacto de perímetros en figuras irregulares (lados inclinados)
2	Área y Fórmula de Pick	Geoplano, Registro de Variables (A, b, \$)	Deducción/Confirmación de la Fórmula de Pick
3	Preparación Lúdica	Confección de Tapete y Cartas/Ruleta	Kit listo para evaluación de competencia
4	Fijación y Evaluación	Juego Twister Matemático	Demostración de agilidad mental y competencia en el uso de fórmulas

El Geoplano, como material manipulable esencial, permitió que los estudiantes exploraran activamente las formas geométricas de manera táctil, facilitando la transición del conocimiento empírico al formal. Este enfoque práctico es crucial, ya que el manejo concreto permite al estudiante una aprehensión más intuitiva y significativa de los conceptos.

3.1 Etapa 1: Perímetro – El Recorrido por el Contorno y la Aplicación del Teorema de Pitágoras

El foco inicial de esta etapa fue establecer el concepto de perímetro como la suma de las distancias que delimitan el contorno de una figura. La actividad se inició con la medición simple, donde la distancia entre clavos adyacentes (horizontal o vertical) fue definida como la unidad de medida estándar (1u).

3.1.1 Práctica y Cálculo de Lados Inclinados:



El principal desafío pedagógico, y el momento de mayor complejidad, se centró en los lados inclinados de los polígonos irregulares. Se orientó a los grupos a visualizar el triángulo rectángulo subyacente a cada segmento oblicuo, cuyos catetos eran definidos por las diferencias en las coordenadas de los clavos (Δx e Δy). Así, la distancia (Δs) — que representa la longitud del lado inclinado y es parte fundamental del perímetro — fue calculada por la aplicación directa de la fórmula de la distancia, que es una consecuencia geométrica del Teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

3.1.1 Articulación Teórica:

Esta práctica articuló lo concreto (la liga estirada en el Geoplano) con lo abstracto (la fórmula), transformando el Teorema de Pitágoras, muchas veces percibido como una regla aislada, en una herramienta esencial y contextualizada para calcular el perímetro exacto en el plano. El registro detallado de cada polígono construido, listando las coordenadas de los vértices y el cálculo del perímetro, incluyendo el trabajo con notación de raíces, reforzó la precisión matemática y la conexión con el campo del Álgebra.

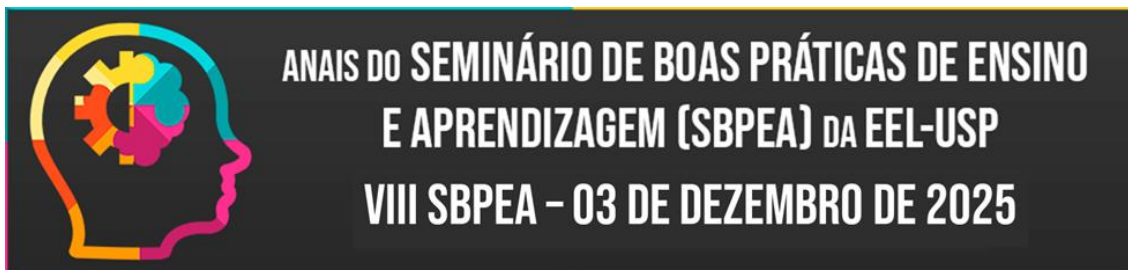
3.2 Etapa 2: Área – La Superficie y la Investigación de la Fórmula de Pick

Esta etapa buscó desarrollar el concepto de área como la medida de la superficie interna, promoviendo la deducción y la investigación matemática de fórmulas más avanzadas.

3.2.1 Área por Descomposición:

Inicialmente, para garantizar la revisión de los conceptos básicos, el área de polígonos irregulares fue calculada por el método de descomposición en figuras elementales (triángulos y rectángulos), cuyas fórmulas ya eran conocidas por los estudiantes. Este cálculo sirvió como base para la etapa siguiente.

- Investigación (Fórmula de Pick): El aspecto más innovador y de investigación de la metodología fue la actividad de descubrimiento. Los grupos fueron desafiados a construir



cinco polígonos distintos, cuyas áreas ya habían sido confirmadas por la descomposición. Para cada uno, registraron sistemáticamente tres variables: el Área (A), el número de clavos en el Contorno (b) y el número de clavos en el Interior (i). A partir del análisis de esa relación de datos, los estudiantes fueron conducidos al desafío de deducir o confirmar la Fórmula de Pick, verificando que:

$$A = \frac{b}{2} + i - 1$$

- Articulación Teórica: La conducción de la investigación promovió el pensamiento lógico, inductivo y deductivo, alineándose a principios de la educación matemática que valorizan la construcción del conocimiento en detrimento de la mera memorización. La posterior utilización de la Fórmula de Pick para calcular el área de un polígono complejo comprobó su rapidez y precisión, reforzando la validez del conocimiento matemático y la capacidad de generalización de reglas.

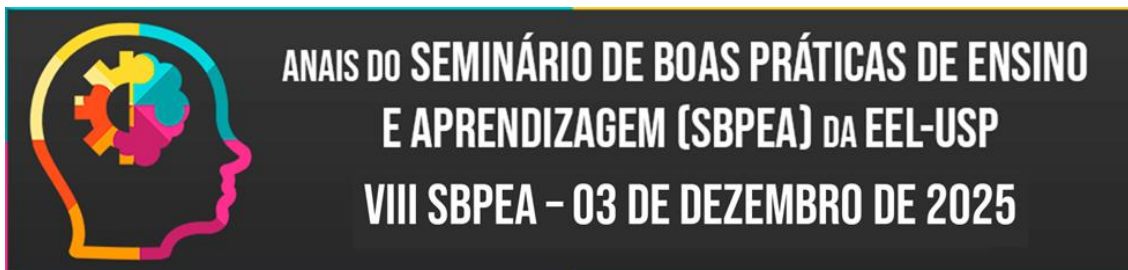
3.3 Consolidación Cinestésica: El Juego Twister Matemático (Etapas 3 y 4)

Las etapas finales transformaron la evaluación y la fijación del contenido en un momento de aplicación lúdica y de movimiento, atendiendo a la necesidad de metodologías activas y del uso del cuerpo en el proceso de aprendizaje.

3.3.1 Confección y Preparación (Etapa 3)

El Twister Matemático fue adaptado para ser el escenario de la evaluación de competencia. Se confeccionó un tapete grande (malla 4 x 4) con círculos numerados, y se preparó un conjunto de cartas/ruleta para dictar los desafíos y la extremidad del cuerpo. Las cartas variaban en complejidad, exigiendo el dominio de todas las fórmulas aprendidas: desde perímetros simples y áreas por fórmulas básicas hasta desafíos que exigían la aplicación del Teorema de Pitágoras (lados inclinados) y de la Fórmula de Pick (áreas de polígonos con b e i dados). Ejemplos de Desafíos: Perímetro de triángulo rectángulo con catetos 3 y 4 (cuyo resultado, 12, exigía el conocimiento de la hipotenusa, 5) o "Área de Pick con b = 10 e i = 3" (resultado 7).

3.3.2 El Juego (Etapa 4) – Aplicación Lúdica y Competencia



El Juego fue el clímax de la experiencia. Los alumnos, jugando en parejas (un "calculista" y un "jugador" en el tapete), eran forzados a realizar cálculos rápidos y precisos.

El juez (profesor o estudiante) sorteaba el desafío y la extremidad del cuerpo (ejemplo, mano derecha). La resolución del desafío (cálculo de área o perímetro) generaba un resultado numérico (ejemplo 12) que correspondía al círculo donde el estudiante debía posicionarse.

La modalidad cinestésica y el desafío del juego promovieron una fijación más duradera y atractiva de los conceptos. La presión del tiempo y la necesidad de mantener el equilibrio físico exigieron que los estudiantes demostraran competencia, agilidad mental y automatismo en los cálculos, sirviendo como una evaluación formativa y sumativa de alto valor. El éxito en el juego estaba directamente ligado al dominio de los conceptos adquiridos con el Geoplano.

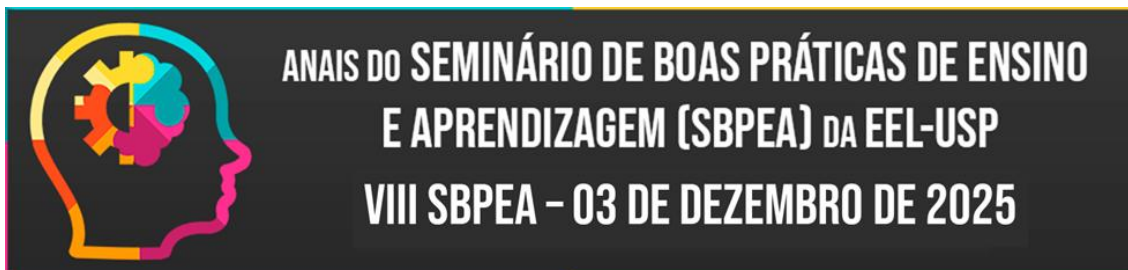
4. RESULTADOS

La aplicación del proyecto pedagógico, que articuló el Geoplano y el Twister Matemático, resultó en la consolidación de conceptos complejos de geometría, demostrando eficacia en tres áreas principales: conexión conceptual, competencia en el cálculo y compromiso de los estudiantes.

4.1. Conexión Concreto-Abstracto e Inclusión Conceptual

Los resultados en las Etapas 1 y 2 (Geoplano) comprobaron el éxito en la construcción de una base conceptual robusta y en la superación de la abstracción inherente a la Geometría formal.

Los alumnos consiguieron visualizar y distinguir de forma clara y táctil los conceptos de área (superficie interna) y perímetro (contorno), superando una dificultad común en el aprendizaje.



La aplicación del Teorema de Pitágoras para calcular lados inclinados fue exitosa. Los registros de los estudiantes demostraron que la fórmula de la distancia fue asimilada no como una regla aislada, sino como una herramienta práctica para medir contornos exactos en el plano, incluyendo el manejo correcto de raíces inexactas.

La metodología de investigación guiada llevó a los grupos a deducir o confirmar la Fórmula de Pick. La prueba final de la fórmula en polígonos complejos comprobó su eficiencia y precisión, validando la capacidad de los alumnos para generalizar reglas matemáticas.

4.2. Competencia y Automatismo en el Cálculo (Twister)

El Juego Twister Matemático (Etapa 4) actuó como un indicador de competencia de alto valor, midiendo la fluidez y la aplicación del conocimiento bajo presión.

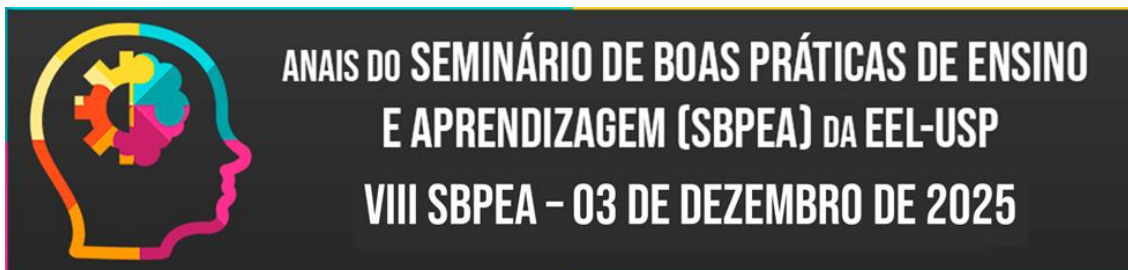
Los estudiantes demostraron competencia y agilidad mental en los cálculos. La presión de la competición y la necesidad de mantener el equilibrio exigieron que ellos alcanzaran un automatismo en los cálculos, siendo capaces de aplicar las Fórmulas de Pick y Pitágoras de forma rápida para determinar el resultado numérico correcto (el objetivo en el tapete).

La modalidad cinestésica (vincular el resultado del cálculo a la acción física de posicionar una extremidad) promovió una fijación de memoria duradera. El éxito en el juego estaba directamente ligado al dominio de los conceptos construidos con el Geoplano, validando la eficacia de la secuencia metodológica.

4.3. Compromiso e Impacto Actitudinal

La metodología lúdica y activa elevó significativamente el compromiso y la percepción de los estudiantes sobre la Matemática.

La integración del juego y del movimiento transformó la disciplina, frecuentemente vista como "dura", en un desafío placentero y motivador. El Twister sirvió como una práctica pedagógica equitativa, ofreciendo una vía de demostración de conocimiento que trascendió la prueba escrita tradicional, permitiendo que alumnos con diferentes estilos



de aprendizaje demostraran su fluidez conceptual. La autoevaluación conceptual final confirmó el impacto positivo del Geoplano y del Twister en la percepción de los estudiantes sobre la importancia, aplicabilidad y accesibilidad de la Geometría.

5. DISCUSIONES

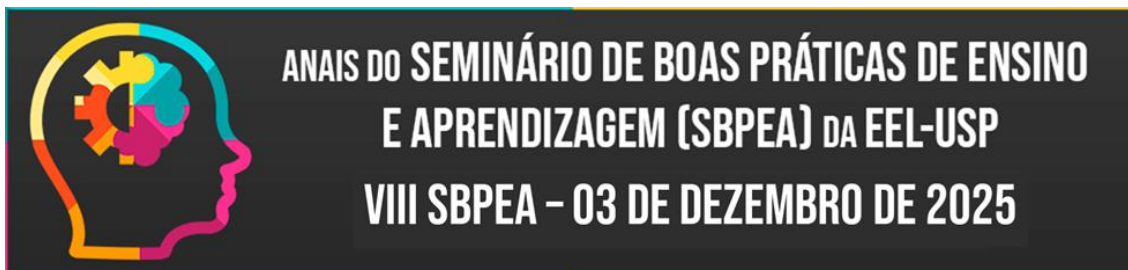
Las discusiones del proyecto pedagógico se centran en la validación de las metodologías activas y lúdicas para la Geometría, en la complejidad conceptual abordada y en las implicaciones para la evaluación de la competencia.

El uso del Geoplano se estableció como una decisión pedagógica crucial y eficaz, confirmando las tesis de teóricos como LORENZATO (2006). La manipulación táctil permitió que los estudiantes superaran la abstracción de la Geometría plana. El Geoplano funcionó como un mediador entre la figura dibujada en el papel y el concepto tridimensional/espacial, facilitando la internalización de la diferencia entre área y perímetro.

La discusión fundamental aquí es la contextualización del Teorema de Pitágoras. Al ser aplicado para calcular la longitud exacta de lados inclinados en el Geoplano (actuando como la fórmula de la distancia), el Teorema es retirado de su contexto meramente algebraico y es insertado en una perspectiva geométrica-analítica. Esto transformó Pitágoras de una "fórmula a memorizar" en una herramienta práctica y esencial para la precisión del cálculo, reforzando la conexión con el Álgebra (trabajo con raíces inexactas).

5.2. El Pensamiento Lógico-Inductivo y la Fórmula de Pick

La introducción de la Fórmula de Pick por medio de la investigación guiada es uno de los puntos más innovadores. La metodología adoptó un enfoque constructivista. La investigación de la relación entre Área (A), clavos en el Contorno (b) y clavos en el Interior (i) estimuló el pensamiento lógico-inductivo. La deducción de la fórmula por los propios alumnos confirió un sentido intrínseco y validez al conocimiento.



La discusión radica en la capacidad de los estudiantes de educación básica de asimilar la generalización de una fórmula avanzada como la de Pick. El proyecto demostró que, con la mediación del material concreto y la estructuración adecuada (descomposición como base), la introducción de conceptos más complejos es viable y enriquecedora.

5.3. El Juego Lúdico como Instrumento de Evaluación de Competencia

El Twister Matemático promueve una fijación de memoria a largo plazo más robusta debido a la modalidad lúdico-cinestésica. La exigencia de vincular un cálculo complejo (área vía Pick) a una acción corporal (colocar el pie en el resultado) creó una asociación cognitiva y motora que reforzó la retención del contenido.

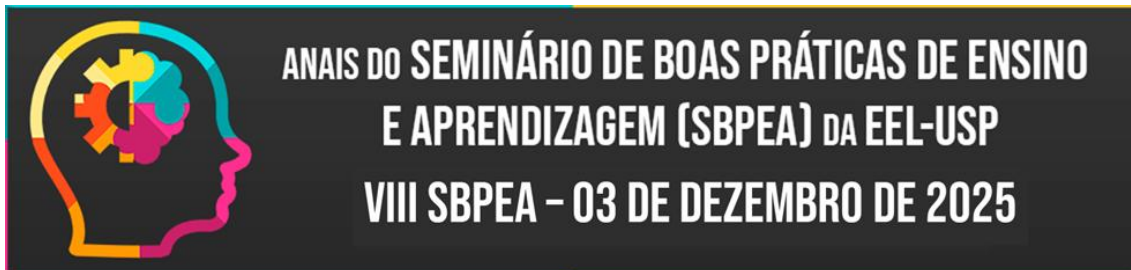
El juego transformó la evaluación en una prueba de competencia y agilidad mental. La presión del tiempo y del equilibrio exigió que los alumnos demostraran automatismo en el uso de las fórmulas, lo que es un indicador superior de dominio que la resolución en papel sin presión.

El proyecto plantea la discusión sobre la necesidad de diversificar los métodos evaluativos. El Twister probó ser un instrumento de evaluación formativa y sumativa que mide la fluidez y la aplicación inmediata del conocimiento, ofreciendo una vía más equitativa.

6. CONSIDERACIONES FINALES

La vivencia del proyecto validó la hipótesis de que la articulación entre el material manipulable (Geoplano) y la actividad lúdico-cinestésica (Twister Matemático) es altamente eficaz para el aprendizaje significativo de conceptos complejos en Geometría. Las principales conclusiones son:

El Geoplano facilitó la visualización de la distinción entre área y perímetro y permitió la introducción práctica de conceptos avanzados como el Teorema de Pitágoras para el cálculo exacto de lados inclinados y la Fórmula de Pick por medio de la investigación guiada.



El Juego Twister actuó como un dispositivo de evaluación aplicada único. Al exigir que los estudiantes calcularan rápidamente (área con Pick o perímetro con Pitágoras) bajo la presión de la competición y el equilibrio físico, la experiencia promovió la fijación cinestésica de los resultados y el desarrollo del automatismo mental, que son indicadores de competencia conceptual. La metodología lúdica y de movimiento elevó significativamente el compromiso de los estudiantes.

El proyecto propone un modelo de secuencia didáctica bien definida (Manejo→ Cálculo→ Fijación) que integró lo táctil (Geoplano), lo formal (Fórmulas de Pick y Pitágoras) y lo corporal (Twister). Este modelo puede ser replicado y adaptado para la enseñanza de otros tópicos matemáticos.

El relato proporcionó evidencia empírica sobre la viabilidad y el impacto de la introducción temprana de la Fórmula de Pick y la aplicación contextualizada del Teorema de Pitágoras para lados inclinados. El uso del juego Twister como instrumento de evaluación de competencia contribuyó a la discusión sobre la necesidad de diversificar los métodos evaluativos, incluyendo la dimensión corporal (cinestésica) para medir la fluidez y la aplicación del conocimiento.

REFERENCIAS

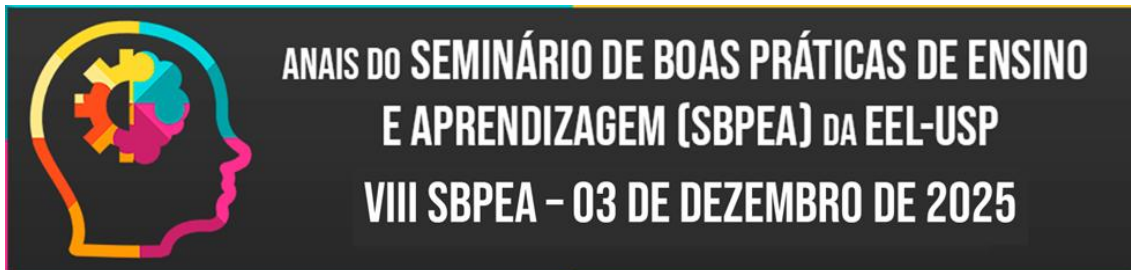
ALMEIDA, Paulo Nunes de. **Educação lúdica**. São Paulo: Loyola, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NUNES, D.; SARACENI, M. O lúdico no Ensino da Matemática. **Revistas PUC-SP**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 55-66, dez. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/28830>



VIGOTSKI, Lev Semenovitch. **A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.