III Encontro Capixaba de Ciências Mecânicas
Seminário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFES

09 a 12 de dezembro de 2025, Vitória/ES, Brasil

EVITANDO O USO DE POLOS ATRAVÉS DO TENSOR DE GALERKIN EM UM PROBLEMA DIFUSIVO-ADVECTIVO

Leone Bernardo Florindo, leone.florindo@gmail.com
Carlos Friedrich Loeffler, loefflercarlos@gmail.com
Luciano de Oliveira Castro Lara, castrolara@hotmail.com

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, CT, Av. Fernando Ferrari, 540- Goiabeiras, 29075-910, Vitória, ES, Brasil.

Resumo. O presente trabalho aplica o Método dos Elementos de Contorno (MEC) à solução de um problema bidimensional de convecção forçada em regime estacionário, com o objetivo de avaliar a precisão numérica de uma formulação baseada no Método da Reciprocidade Múltipla, Interpolação Direta e Técnica de Decomposição de Derivadas. O MEC se destaca por reduzir a dimensionalidade do problema e eliminar a necessidade de discretização do domínio, sendo especialmente eficiente em meios homogêneos com condições de contorno bem definidas. A formulação proposta permite representar os termos de domínio em função de integrais de contorno, utilizando funções de base radial para interpolar derivadas e decompondo o campo de velocidades em componentes normais e tangenciais, o que aprimora a estabilidade e a precisão do termo advectivo. O estudo foi conduzido considerando um escoamento uniforme em um domínio quadrado, com condições de contorno de Dirichlet e Neumann aplicadas em lados opostos, e condições homogêneas nas arestas horizontais. O número de Péclet adotado foi Pe=1, representando um regime balanceado entre difusão e advecção. Os resultados numéricos obtidos para diferentes níveis de refinamento mostraram comportamento consistente, com boa estabilidade e convergência da solução. A formulação proposta manteve a precisão típica do MEC clássico, reduzindo a necessidade de polos internos e mostrando-se adequada para problemas de difusão-advecção em baixos números de Péclet. Os resultados confirmam o potencial da técnica para aplicações em engenharia térmica, transporte de massa e escoamento de fluidos em meios contínuos.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Técnica de Decomposição de Derivadas. Método da Reciprocidade Múltipla. Problema Difusivo-Advectivo.

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) se destacou por permitir a resolução de problemas físicos sem discretizar o domínio, reduzindo a dimensionalidade do problema e oferecendo precisão computacional, flexibilidade na malha e tratamento simultâneo da variável primária e sua derivada. No entanto, a eliminação exata das integrais de domínio só é possível para equações governadas por operadores diferenciais auto-adjuntos, com uma solução fundamental conhecida (função de Green). Para muitos problemas práticos, como problemas difusivo-advectivos com campos de velocidade variáveis, forças corporais ou equações complexas, a solução fundamental não está disponível ou seu uso não é numericamente vantajoso (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

Para contornar essa limitação, técnicas como Dupla Reciprocidade (MECDR) e Interpolação Direta (MECID) utilizam funções radiais para aproximar integrais de domínio, mantendo grande parte da eficiência do MEC clássico, embora exijam pontos internos ("polos") para garantir precisão. Uma alternativa é o Método da Reciprocidade Múltipla (MRM), que aplica sucessivas funções fundamentais gerando primitivas de ordem superior, evitando polos e sendo adequado para problemas escalares, inclusive Poisson e Helmholtz (BALISTA et al., 2023).

No trabalho de Loeffler et al. (2025), o MRM é combinado com o MECID para tratar integrais de ordem mais alta em problemas difusivo-advectivos, demonstrando a aplicabilidade dessa abordagem e reduzindo a necessidade de polos em números baixos de Péclet. Além disso, a Técnica de Decomposição de Derivadas (TDD) permite tratar derivadas normais e tangenciais de forma precisa, viabilizando a solução de problemas com difusão-advecção e número baixo de Péclet sem recorrer à discretização interna, mantendo a eficiência do MEC clássico (LOEFFLER; LARA; ORIQUE, 2022).

O modelo proposto é adequado para aplicações em engenharia hidráulica, transporte de fluidos e processos de transferência de calor em meios não homogêneos, apresentando desempenho consistente na redução de polos em formulações envolvendo derivadas espaciais de primeira ordem. Essa característica confere ao método maior estabilidade numérica e eficiência computacional, tornando-o uma alternativa promissora frente a abordagens tradicionais baseadas em discretizações densas ou aproximações locais. Além disso, a possibilidade de incluir polos adicionais permite controlar o grau de precisão da solução, adaptando o modelo às exigências específicas de cada problema físico.

A formulação mantém a generalidade necessária para tratar diferentes tipos de fenômenos convectivos e difusivos, podendo ser estendida a domínios de geometria complexa ou condições de contorno mistas. Dessa forma, o método se mostra versátil não apenas do ponto de vista teórico, mas também prático, facilitando sua aplicação em estudos de engenharia que demandam alta fidelidade na representação do campo de potencial.

Neste trabalho, a técnica proposta será aplicada a um problema bidimensional de convecção forçada, com velocidade constante dentro de um domínio quadrado. As condições de contorno variam em cada lado do domínio: na aresta vertical esquerda, impõe-se uma condição de Dirichlet homogênea (potencial prescrito), enquanto na aresta vertical direita aplica-se uma condição de Neumann não homogênea (fluxo prescrito). Nas arestas horizontais superior e inferior, por sua vez, impõe-se uma condição de Dirichlet, na qual o potencial u é nulo.

O objetivo principal deste estudo é avaliar o desempenho do modelo proposto na solução do problema supracitado, verificando sua capacidade de representar adequadamente o transporte convectivo e a distribuição do potencial sob diferentes condições de contorno. Serão discutidos aspectos relacionados à precisão, convergência e comportamento numérico do método, de modo a evidenciar suas vantagens e limitações frente a técnicas convencionais de análise.

2. EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO

A equação que rege um modelo difusivo-advectivo em regime estacionário, em um meio isotrópico, tem sua origem no princípio fundamental de conservação de energia da mecânica dos contínuos, o qual estabelece que a taxa de variação do fluxo de energia em um volume de controle deve ser igual à soma dos fluxos advectivos e difusivos que atravessam suas fronteiras. Esse equilíbrio físico descreve o transporte de uma grandeza escalar — como temperatura, concentração ou potencial — sob a ação combinada de dois mecanismos distintos: a difusão, que tende a uniformizar o campo devido a gradientes espaciais, e a advecção, responsável pelo transporte dessa grandeza em função do movimento do fluido. Quando o sistema atinge o regime permanente, as variações temporais desaparecem, restando apenas os efeitos espaciais do transporte. Nessa condição, e assumindo propriedades do meio constantes e isotrópicas, a equação diferencial governante pode ser convenientemente expressa em notação indicial, conforme mostrado na equação (1) (REDDY, 2023), permitindo uma representação compacta e adequada à formulação integral de contorno que será desenvolvida nas seções seguintes.

$$\lambda u_{,ii}(X) = \bar{v}_i(X) u_{,i}(X) \tag{1}$$

Nessa equação, λ representa a difusividade térmica do meio contínuo, u(X) é a temperatura (variável primária) e v_i é o campo de velocidades aplicado ao domínio. Considerando o foco deste trabalho, adotam-se estratégias numéricas que reduzem a necessidade de polos internos. Para simplificar, assume-se que o meio é homogêneo e o escoamento incompressível. Embora seja possível considerar um campo de velocidades variável, para facilitar o estudo da taxa de convergência e da aplicabilidade do modelo proposto, assume-se inicialmente que os componentes do campo de velocidades são constantes e normalizados pelas propriedades do meio conforme apresentado pela equação (2).

$$v_i = \bar{v}_i / \lambda \tag{2}$$

Resultando em equação (3):

$$u_{,ii}(X) = v_i(X) u_{,i}(X) \tag{3}$$

Neste ponto, é necessário desenvolver a equação integral de contorno, que transforma o problema diferencial definido no domínio em uma integral sobre o contorno, simplificando a análise numérica.

3. EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

De acordo com a metodologia adotada neste trabalho, a equação integral de contorno é obtida multiplicando-se ambos os lados da equação diferencial parcial difusivo-advectiva por uma função auxiliar $u*(\xi,X)$ e integrando sobre todo o volume de controle $\Omega(X)$, conforme indicado na equação (4):

$$\int_\Omega u_{,ii}(X) u^*(\xi, X)\, d\Omega = \int_\Omega v_i(X) u_{,i}(X) u^*(\xi, X)\, d\Omega \tag{4}$$

A função auxiliar $u*$ é a função de Green associada ao problema de Poisson, correspondente à resposta de um meio infinito sujeito a uma fonte concentrada unitária (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1994).

O tratamento matemático do termo à esquerda da equação (4), relacionado aos efeitos de difusão, é amplamente conhecido (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), resultando na seguinte forma integral, equação (5):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_\Gamma u(X) q^*(\xi; X)\, d\Gamma - \int_\Gamma q(X) u^*(\xi; X)\, d\Gamma = -\int_\Omega v_i(X) u_{,i}(X) u^*(\xi; X)\, d\Omega \tag{5}$$

O termo à direita da equação (5) é tratado aplicando-se o conceito de reciprocidade múltipla, no qual são consideradas as funções fundamentais de ordem superior, correspondentes aos Laplacianos sucessivos da função fundamental $u*(\xi;X)$. Dessa forma, a primeira dessas funções é definida pela equação (6):

$$^{0}U^{*}_{,ii}(\xi;X) = u^{*}(\xi;X) \tag{6}$$

A partir da definição inicial da primeira primitiva da solução fundamental apresentada na equação (6), o desenvolvimento matemático prossegue com a aplicação sucessiva do método da Reciprocidade Múltipla, no qual integrais de domínio são gradualmente transformadas em integrais de contorno por meio da introdução das primitivas de ordem superior da função fundamental. Esse processo envolve o uso repetido de integrações por partes e do Teorema da Divergência, considerando simplificações associadas ao campo de velocidades constante e ao uso de elementos lineares. Como resultado, obtém-se uma formulação geral capaz de expressar o termo de domínio original em função de integrais de contorno sucessivas, culminando na equação (7), que representa a forma generalizada do procedimento de Reciprocidade Múltipla.

$$\int_{\Omega} \mathrm{v_i\, u_{,i}}\ {}^{1}\mathrm{U}^{*}_{,kk} d\Omega = \sum_{n=0}^{p} \mathrm{v}^{p} \int_{\Gamma} \mathrm{v_i\, u_{,i}}\ {}^{p}\mathrm{U}^{*}_{,k} d\Gamma - \mathrm{v}^{2p} \sum_{n=0}^{p} \mathrm{q}\ {}^{p}\mathrm{U}^{*} d\Gamma + \mathrm{v}^{2p} \sum_{n=0}^{p} \int_{\Omega} \left(\mathrm{v_i u_{,i}}\right)\ {}^{p}\mathrm{U}^{*} d\Omega \tag{7}$$

O MECID é uma estratégia que substitui integrais de domínio por integrais de contorno, aproximando o núcleo dessas integrais através de funções de base radial. Diferente do método de Reciprocidade Múltipla, o MECID não depende de condições de reciprocidade, funcionando como uma interpolação direta mais simples e numericamente estável. Essa abordagem foi inicialmente aplicada em engenharia por Nardini e Brebbia (1983) e, desde então, demonstrou oferecer maior precisão e robustez numérica em diversos problemas. No MECID, as funções radiais são utilizadas para aproximar o termo de domínio presente na equação (7), transformando-o em uma combinação de integrais de contorno, o que elimina problemas de singularidade normalmente associados às funções fundamentais clássicas.

Por meio dessa técnica, as integrais são reescritas em forma matricial, permitindo que os termos do domínio sejam expressos como o produto entre uma matriz de interpolação e um vetor de variáveis físicas. A determinação do escalar b=$v_i u_{,i}$ é feita com base na variável potencial $u(X)$, cujas derivadas espaciais são aproximadas usando funções radiais específicas, como $F(r)$=$r^3/9$. O resultado final é uma formulação puramente de contorno, em que as grandezas do domínio são representadas em função das variáveis de contorno, consolidando o MECID como uma extensão mais direta, precisa e eficiente do Método dos Elementos de Contorno tradicional (LOEFFLER et al., 2024).

Entretanto, como a precisão das derivadas espaciais obtidas por funções de base radial tende a se degradar, especialmente na direção normal à fronteira, introduz-se o TDD como uma estratégia complementar. Essa técnica permite aprimorar a exatidão ao decompor o vetor velocidade e o gradiente do potencial. A ideia central é decompor o vetor velocidade e o gradiente do potencial em componentes normais e tangenciais, descrevendo as derivadas ao longo de coordenadas tangenciais no contorno. Essa reformulação é particularmente útil em modelos de convecção forçada de calor, mas pode ser aplicada a outros problemas escalares com termos advectivos semelhantes. A abordagem mostra que, ao reescrever o produto escalar $v_i u_{,i}$ em termos de $v_n q$+v_tt, sendo q a derivada normal e t a derivada tangencial do potencial, obtêm-se resultados mais estáveis e precisos, pois as derivadas tangenciais dependem fortemente dos valores nos elementos de contorno adjacentes, onde a interpolação é mais confiável.

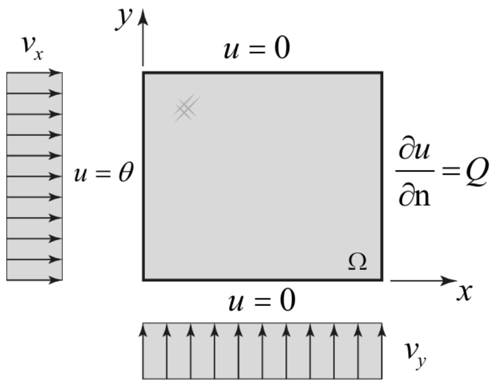
Com essa decomposição, as integrais de contorno passam a envolver duas componentes — uma associada à derivada normal e outra à derivada tangencial —, permitindo que o termo advectivo seja tratado de forma mais precisa dentro do MRM e do MECID. As integrais resultantes são então convertidas em matrizes incorporadas ao sistema global do MEC, em que as incógnitas continuam sendo u e q. Essa formulação preserva a precisão da parte difusiva do problema e melhora a estimativa da contribuição advectiva, consolidando a decomposição tangencial como uma ferramenta eficaz para aprimorar o desempenho numérico em problemas com transporte e convecção.

Os detalhes completos da dedução, abrangendo as etapas intermediárias, formulações matemáticas e justificativas teóricas, encontram-se descritos de maneira sistemática no trabalho de Loeffler et al. (2025), que serve como principal referência para o desenvolvimento apresentado neste estudo.

4. PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE CONVECÇÃO FORÇADA

Este estudo considera um problema bidimensional de convecção forçada, no qual um fluido incompressível escoa com velocidade uniforme dentro de um domínio quadrado. O transporte de uma grandeza escalar, neste caso o potencial u, ocorre sob a ação simultânea de difusão e advecção, envolvendo interações complexas entre os gradientes de velocidade e os fluxos de calor ou massa no domínio.

Figura 1 – Problema Bidimensional de Convecção Forçada

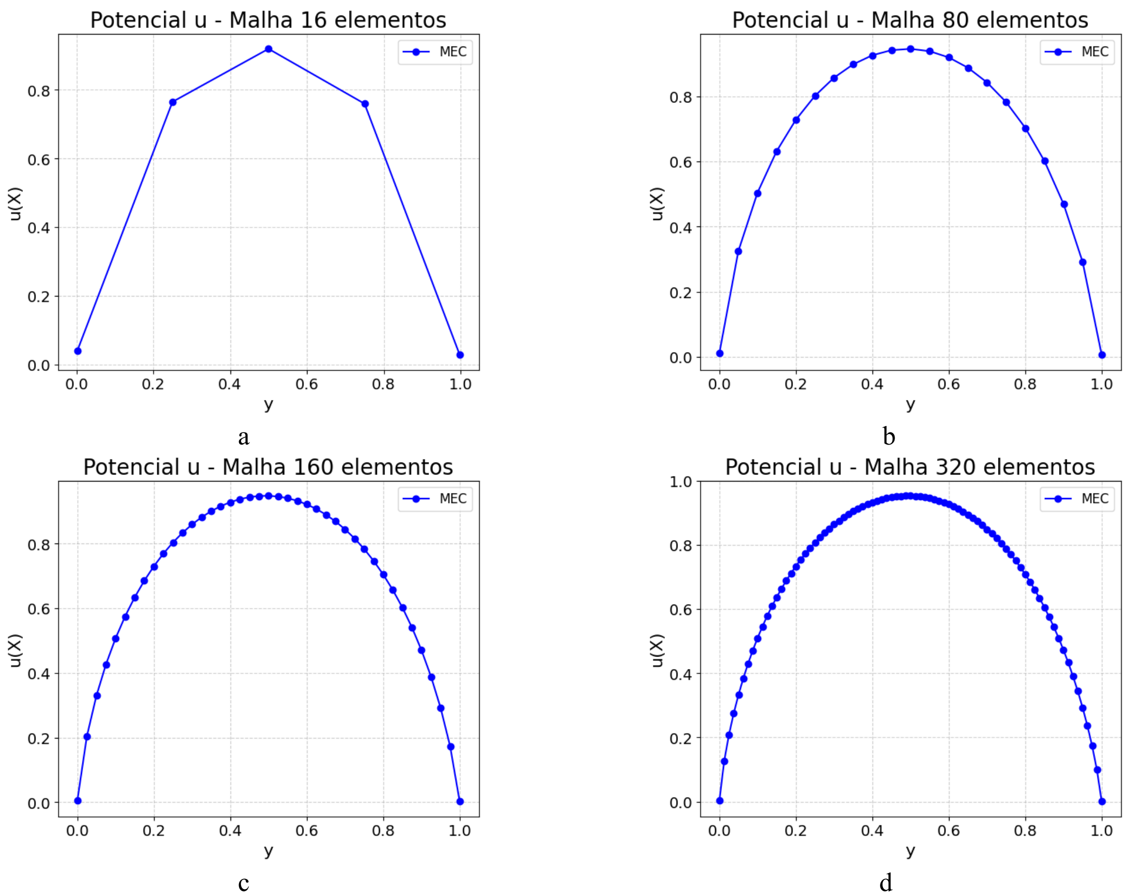


Fonte: PINHEIRO (2023).

As condições de contorno variam ao longo do domínio: na aresta vertical esquerda, aplica-se uma condição de Dirichlet homogênea, impondo um valor prescrito do potencial u nulo; na aresta vertical direita, utiliza-se uma condição de Neumann não homogênea, onde o fluxo é determinado e específico. Essa configuração permite observar o comportamento do campo potencial frente a diferentes tipos de restrições nas fronteiras, conforme ilustrado na Figura 1.

As análises concentram-se nos valores de potencial obtidos ao longo da aresta direita, onde são analisados os resultados numéricos.

Figura 2 – Resultado Numérico – Aresta Direita



Fonte: Produção do próprio autor.

A Figura 2 apresenta os resultados numéricos obtidos para o potencial u considerando diferentes discretizações do domínio, correspondentes a malhas com 16, 80, 160 e 320 elementos, indicadas nas Figuras 2a, 2b, 2c e 2d, respectivamente. Em todas as simulações, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) aliado às formulações numéricas descritas neste trabalho. Observa-se que, mesmo para a malha mais grosseira (Figura 2a), o comportamento geral da solução já é adequadamente capturado, evidenciando a estabilidade do método frente à discretização espacial. À medida que o número de elementos aumenta, o campo numérico torna-se progressivamente mais suave e coerente, indicando uma melhora significativa na resolução espacial da solução.

Com o refinamento da malha, nota-se que a curva obtida tende a convergir para um padrão bem definido, sugerindo que o método tende a uma solução mais acurada. Essa tendência de convergência é um indicativo importante da consistência do modelo e da eficiência das técnicas numéricas empregadas, demonstrando que o erro associado à discretização aparenta diminuir de maneira controlada à medida que o número de elementos aumenta.

Neste caso, o número de Péclet adotado é igual a Pe=1, o que caracteriza um regime de transporte equilibrado entre os efeitos de advecção e difusão. Essa condição intermediária é particularmente útil para avaliar a estabilidade e a precisão do método, pois evita tanto o domínio do termo difusivo — típico de baixos valores de Péclet — quanto a instabilidade numérica associada a altos valores de Pe, nos quais a convecção é dominante. Assim, o caso analisado representa uma situação que permite verificar a capacidade do método em descrever adequadamente o comportamento físico do problema sem recorrer a técnicas de estabilização adicionais.

De modo geral, a análise comparativa entre as diferentes malhas mostra que o método é capaz de reproduzir com boa estabilidade o comportamento físico esperado, mesmo na ausência de uma solução analítica para validação direta. O refinamento progressivo evidencia a convergência numérica e a robustez da formulação empregada, reforçando seu potencial para aplicação em problemas de difusão-convecção mais complexos, onde a obtenção de soluções analíticas é inviável.

5. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos demonstram que o modelo proposto apresenta desempenho consistente na resolução do problema de convecção forçada bidimensional considerado. O método mostrou-se estável e preciso mesmo para malhas relativamente grosseiras, evidenciando boa convergência com o refinamento da discretização. Observou-se que o comportamento do campo de potencial é adequadamente capturado pelas formulações utilizadas, reproduzindo a influência dos termos advectivos e difusivos de maneira equilibrada. A variação progressiva das malhas indicou uma tendência de estabilização da solução, reforçando a robustez da abordagem e a eficiência das estratégias numéricas implementadas.

O caso com número de Péclet igual a Pe=1 revelou-se particularmente útil para avaliar o desempenho do método, uma vez que representa um regime intermediário no qual os efeitos de difusão e advecção possuem magnitudes comparáveis. Sob essas condições, o modelo foi capaz de manter estabilidade e coerência nos resultados, sem apresentar oscilações numéricas indesejadas. Essa característica é especialmente importante em aplicações práticas, onde o controle do balanço entre transporte difusivo e convectivo é essencial para garantir soluções fisicamente consistentes.

De modo geral, o estudo confirma que a técnica proposta é promissora para a modelagem de fenômenos convectivo-difusivos em domínios bidimensionais, podendo ser estendida a geometrias mais complexas e a diferentes regimes de transporte. O desempenho observado sugere que o método possui potencial para aplicação em problemas de engenharia envolvendo transferência de calor, escoamento interno e transporte de espécies químicas.

Como perspectiva para trabalhos futuros, destaca-se a busca por uma solução analítica ou semi-analítica de referência que permita avaliar quantitativamente o erro e a taxa de convergência do método. Além disso, pretende-se investigar o comportamento da formulação para valores mais elevados do número de Péclet, nos quais os efeitos convectivos se tornam dominantes, e explorar possíveis extensões da abordagem para formulações tridimensionais ou com condições de contorno não lineares. Tais avanços poderão consolidar ainda mais a aplicabilidade e a confiabilidade do modelo proposto em diferentes contextos de engenharia.

6. REFERÊNCIAS

BALISTA, T. G.; LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C.; MANSUR, W. J. Comparisons between direct interpolation and reciprocity techniques of the boundary element method for solving two-dimensional Helmholtz problems. **Engineering Computations**, v. 40, nº 9/10, pp. 2841-2861, 2023.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements:** an introductory course. [S.l.]: WIT press, 1994.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques – Theory and Applications**, Springer-Verlag, New York, 1984.

LOEFFLER, C. F.; FLORINDO, L. B.; LARA, L. O. C.; CAMPOS, L. S. Mitigating the requirement of poles in incompressible diffusive-advective heat transfer problems using the decomposition of derivatives and the multiple reciprocity techniques. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 180, p. 106-498, 2025.

LOEFFLER, C. F.; LARA, L. O. C.; ORIQUE, F. R. Performance of spatial derivatives using interpolation with radial basis functions. **Studies in Engineering and Exact Sciences,** p. 777–798, 2022.

LOEFFLER, C. F.; PINHEIRO, V. P.; CHACALTANA, J. T. A.; LARA, L. O. C. Direct Interpolation Boundary Element Method applied for solving Steady-State Convection-Diffusion-Reaction Problems with Variable Velocity Field. **International Communications in Heat and Mass Transfer,** 2024.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. **Appl Math Model**, p.157-162, 1983.

PINHEIRO, V. P. **Formulações do Método de Elementos de Contorno com Interpolação Direta em Problemas Difusivo-Advectivo-Reativos Estacionários**. 2023. Tese (Doutorado) – UFES, Vitória, 2023.

REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics.** 2ª ed., Cambridge University Press, 2023.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao LabTecMec-UFES pelo patrocínio e pelo incentivo à divulgação científica proporcionado por meio deste evento.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.