

ESTUDO COMPARATIVO DOS MÉTODOS DE VOLUMES FINITOS E ELEMENTOS DE CONTOURNO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ONDAS BIDIMENSIONAIS EM MEIOS HETEROGÊNEOS

Thiago G. Balista¹, thiago.balista@gmail.com
Carlos F. Loeffler¹, loefflercarlos@gmail.com
Luciano O. C. Lara¹, castrolara@hotmail.com
Julio T. A. Chacaltana², juliotac2019@gmail.com
Renan A. Peres², renan.peres@edu.ufes.br

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

²Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Resumo. Este trabalho apresenta uma comparação entre o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), este último na versão não estruturada, aplicados à resolução de problemas de propagação de ondas escalares em meios homogêneos e heterogêneos bidimensionais. O objetivo é avaliar a capacidade dessas duas técnicas numéricas para tratar problemas dinâmicos dessa natureza, reconhecidos pela alta complexidade e pela exigência de precisão. Para isso, analisam-se a taxa de convergência em função do refinamento da malha, a robustez numérica quanto à estabilidade dos esquemas de avanço temporal, entre outros aspectos. Essas análises são realizadas a partir da solução de um problema clássico utilizando ambos os métodos, o que permite uma comparação direta da precisão dos resultados obtidos. Os resultados indicam boa concordância entre as soluções dos dois métodos e desempenho encorajador do MECID em meios heterogêneos, indicando novas perspectivas para aplicações mais complexas.

Palavras-chave: Elemento de Contorno, Método de Interpolação Direta, Método dos Volumes Finitos, Meios Homogêneos e Heterogêneos, Problemas Dinâmicos.

1. INTRODUÇÃO

É um fato comprovado que, durante a propagação de uma onda de pressão em um meio fluido, as partículas desse meio sofrem pequenos deslocamentos, retornando posteriormente à posição inicial. Também se verifica, na prática, que a velocidade dessas partículas é muito inferior à velocidade de propagação da onda de pressão. Esses dados, aliados à hipótese de um processo isentrópico durante a propagação da onda em um fluido compressível e aos princípios da conservação de massa e momento, permitem eliminar os termos envolvendo velocidade e obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para a pressão, denominada equação da Onda Acústica (Graff, 1994), que considera a não homogeneidade do meio contínuo:

$$\left[\frac{c^2}{K(X)} u(X, t),_i \right]_{,i} = \frac{1}{K(X)} \ddot{u}(X, t) \quad (1)$$

Na equação (1), $u(X, t)$ representa o deslocamento causado pela onda de pressão no meio fluido, e c é a velocidade de propagação da onda. Ressalta-se a relação $K(X) = \rho c^2$, em que ρ é a massa específica.

Vale notar que há uma semelhança entre a equação da acústica para meios fluidos e o problema de propagação de ondas de expansão em meios sólidos. Sabe-se que as ondas de atraso, por viajarem mais lentamente que as ondas de expansão, podem ser desconsideradas explicitamente nos procedimentos típicos de análise sísmica. Assim, a pressão $u(X, t)$ Vale notar que há uma semelhança entre a equação da acústica para meios fluidos e o problema de propagação de ondas de expansão em meios sólidos. Sabe-se que as ondas de atraso, por viajarem mais lentamente que as ondas de expansão, podem ser desconsideradas explicitamente nos procedimentos típicos de análise sísmica.

Uma equação diferencial parcial, como a expressa pela equação (1), não possui solução analítica, especialmente quando o meio é não homogêneo. Portanto, é imperativo empregar métodos de solução discreta aproximada, notadamente o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método do Volume Finito (MVF) e o Método do Elemento de Contorno (MEC).

Apesar de suas muitas semelhanças, os três primeiros são considerados técnicas de domínio, nas quais tanto a discretização quanto a integração numérica são realizadas sobre o domínio físico. No MEC, tais integrações são restritas ao contorno. Alguns problemas - especialmente aqueles em que o meio é heterogêneo - apresentam variação de

propriedades ao longo do domínio que é imediatamente incorporada pelos métodos de domínio, sendo incluída diretamente em elementos, volumes ou células. Contudo, essas propriedades variáveis requerem o uso de estratégias especiais no caso do MEC. O caráter setorial ou gradual da heterogeneidade também é particularmente relevante para o modelo matemático a ser adotado pelo MEC. Neste trabalho, resolvem-se apenas casos segmentados homogêneos e, nesses, a equação (1) pode ser simplificada, resultando na forma apresentada na equação (2):

$$u(X, t)_{,ii} = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(X, t) = \frac{\rho}{K(X)} \ddot{u}(X, t) \quad (2)$$

Portanto, nos problemas tratados por partes, as propriedades são determinadas diretamente nos volumes finitos, ao passo que, no MEC, é preciso empregar técnicas como sub-regiões ou superposição de domínios. Com base nesse contexto, o objetivo deste trabalho é comparar o desempenho do MECID e do MVF não estruturado na resolução de problemas bidimensionais de propagação de ondas escalares em meios homogêneos e heterogêneos segmentados.

2. MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

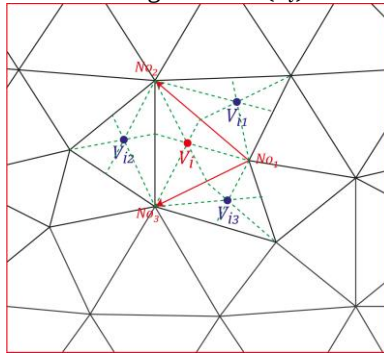
O Método de Volume Finito (MVF) é uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais parciais. Baseia-se na discretização do domínio em pequenos volumes e na garantia do balanço de propriedades como massa, energia e momento em cada volume. Inicialmente, a descoberta da difusão é integrada em um volume finito genérico $\Omega(X)$ de modo que a equação (3) é obtida:

$$\int_{\Omega} [K(X)u(X, t)_{,i}]_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}(X, t) d\Omega \quad (3)$$

Na metodologia aqui empregada, o lado direito da equação (1) é primeiramente resolvido isoladamente da parte dinâmica, sem perda de generalidade. Isso ocorre porque o termo dependente do tempo é facilmente operacionalizado por meio de esquemas de *feedforward* incremental, também conhecidos como técnicas de integração direta, que também funcionaram nos principais métodos discretos conhecidos.

Considerando o lado esquerdo da equação (2), o foco está no desenvolvimento de uma solução numérica em volumes não finitos, capaz de representar eficientemente contornos irregulares e permitir um refinamento diferenciado em algumas áreas do domínio, se necessário. Assim, o modelo numérico é baseado em um triângulo base, que deve ser relacionado aos triângulos vizinhos e à normal externa unitária às arestas do triângulo base, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Volume finito triangular base (V_i) e seus volumes vizinhos



Fonte: Produção do próprio autor.

Utilizando o Teorema da Divergência (Stewart, 2009), a integral de domínio no triângulo base pode ser reescrita em termos de integrais de contorno e ser decomposta na soma de três integrais envolvendo as faces do volume triangular, de acordo com a relação apresentada na equação (4):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [K(X)u(X, t)_{,i}]_{,i} d\Omega &= \int_{\Gamma} [K(X)u(X, t)_{,i} n_i] d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} [K_1 u_1(X, t)_{,i} n^1_i] d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} [K_2 u_2(X, t)_{,i} n^2_i] d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} [K_3 u_3(X, t)_{,i} n^3_i] d\Gamma_3 \end{aligned} \quad (4)$$

Na equação (4), Γ_1 é a superfície da face que une os nós 1 e 2, Γ_2 é a superfície da face que une os nós 2 e 3, e Γ_3 é a superfície da face que une os nós 3 e 1. Os vetores normais unitários em cada aresta são dados por n_i . Cada integral no

lado direito da equação (4) pode ser aproximada utilizando o teorema do valor médio para integrais, resultando na equação (5):

$$\int_{\Gamma} [K(X)u(X, t)_{,i} n_i] d\Gamma = K_1 u_1(X, t)_{,i} n^1_i L_1 + K_2 u_2(X, t)_{,i} n^2_i L_2 + K_3 u_3(X, t)_{,i} n^3_i L_3 \quad (5)$$

Na equação (5), L_1 , L_2 e L_3 são os comprimentos das arestas entre nós adjacentes. O cálculo de cada um dos gradientes que aparecem é realizado aplicando o Teorema do Gradiente (OLIVEIRA, 1965). Após alguma manipulação algébrica, pode ser reescrito na forma discreta comumente utilizada no método do volume finito, após substituir as aproximações numéricas dos gradientes calculados, chega-se na equação (6):

$$\int_{\Gamma} [K(X)u(X, t)_{,i} n_i] d\Gamma = A_1 u_1 + A_{i1} u_{i1} + A_{i1} u_{12} + A_{i2} u_{i2} + A_{i3} u_{i3} \quad (6)$$

A equação (6) é utilizada para construir o sistema de equações que representa a forma discreta do domínio contínuo de interesse. Nessa equação, o valor discreto da função $u(X, t)$ é calculado no centróide de cada volume, e as informações provenientes dos volumes vizinhos permitem estabelecer a compatibilidade entre os elementos, possibilitando a formulação do sistema de equações para os diferentes volumes finitos (PATANKAR, 1980; BATHE, 1982). Assume-se que os valores de $u(X, t)$ nos vértices de cada elemento triangular são conhecidos, sendo obtidos por interpolação a partir dos valores de $u(X, t)$ no centróide. O passo seguinte consiste em integrar o termo acústico da Equação da Onda no volume finito base Ω_i , conforme mostrado na proposta da equação (7):

$$\int_{\Omega_i} \rho \ddot{u}(X, t) d\Omega = \frac{\Omega_i}{K_i} \left[\frac{u_i^{t+1} - 2u_i^t + u_i^{t-1}}{\Delta t^2} \right] \quad (7)$$

Na equação (7), Ω_i é o volume do volume finito base e t é o tempo discreto. Sem perda de generalidade, considerando um volume base com seção transversal triangular e espessura unitária, o valor associado a esse volume corresponde à própria área do elemento da malha triangular. Nessa equação, utiliza-se a aproximação por diferenças finitas da segunda derivada temporal da variável primal $u(X, t)$, com aproximação de segunda ordem no tempo. Dessa forma, configura-se um esquema de integração explícita, no qual o avanço incremental no tempo é realizado mediante a escolha de um passo de integração apropriado Δt (Bathe, 1982; Danu e Tenaud, 2004), partindo de condições iniciais e de contorno prescritas. Então, o esquema explícito fornecerá o valor de pressão no futuro $t + 1$, desde que os valores de pressão sejam conhecidos no presente t e no passado $t - 1$, em todo o domínio de interesse.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

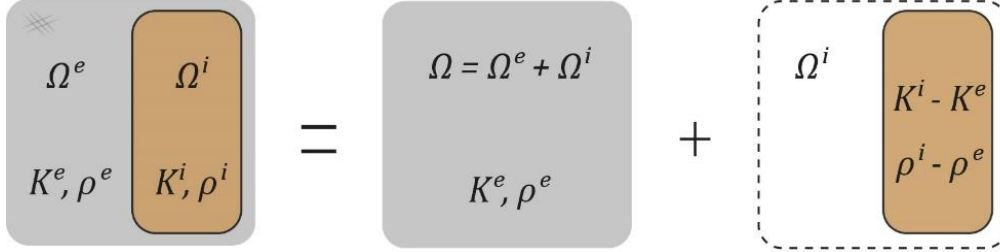
Seguindo os procedimentos típicos do Método do Elemento de Contorno (MEC), a proposta do diferencial governante deve ser expressa em forma integral, utilizando uma função auxiliar que consiste na descrição da solução fundamental. Essa função pode ser uma função de Green diretamente associada ao problema em questão ou uma forma simplificada da mesma, relativa a um problema estacionário. Explorando esta última possibilidade, emprega-se a solução fundamental do problema de Poisson $u^*(\xi; X)$ (Brebbia e Walker, 1980), o que permite recorrer a formulações mais simples e compatíveis com métodos de avanço temporal discreto, semelhantes ao apresentado no lado direito da equação (7). Portanto, considerando que a não homogeneidade é setorial, a forma integral forte associada à equação governante da onda acústica pode ser reescrita de acordo com a Técnica de Superposição de Domínio (TSD) (LARA *et al.*, 2018):

$$\begin{aligned} K^e \int_{\Omega^e} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega^e + K^s \int_{\Omega^i} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega^i \\ = \rho^e \int_{\Omega^e} \ddot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega^e + \rho^s \int_{\Omega^i} \ddot{u}(X, t) u^*(\xi; X) d\Omega^i \end{aligned} \quad (8)$$

Na TSD, todo o problema é modelado por uma superposição de um domínio homogêneo circundante juntamente com subdomínios internos complementares, que possuem propriedades distintas (ver a Figura 2). Devido a limitações de espaço, mais detalhes podem ser encontrados na literatura especializada (LARA *et al.*, 2018; BARBOSA E LOEFFLER, 2020; BARCELOS *et al.*, 2021). Portanto, na equação (8), K^e e ρ^e representam, respectivamente, as propriedades de rigidez e inércia do domínio circundante, enquanto K^i e ρ^i correspondem às mesmas propriedades no domínio interno. Também é possível considerar que $K^s(X) = K^i(X) - K^e(X)$ e $\rho^s(X) = \rho^i(X) - \rho^e(X)$. A solução fundamental $u^*(\xi; X)$

é estacionária, correspondendo à solução de um problema estacionário com um domínio infinito, sujeito a uma fonte concentrada, aplicada em um ponto específico no domínio espacial X , chamado de ponto de fonte ξ . A expressão para a solução fundamental pode ser encontrada na referência (NARDINI E BREBBIA, 1983).

Figura 2 – Domínio completo e setorial



Fonte: Produção do próprio autor.

Pode-se observar que o lado esquerdo da equação (8) consiste no operador Laplaciano, que é um operador diferencial auto-adjunto. Sob estas condições, a aplicação de procedimentos de integração por partes e o Teorema da Divergência levam a uma forma inversa associada ao operador Laplaciano, de modo que para um dado setor Ω_e se tenha:

$$K^e \int_{\Omega^e} u_{,ii}(X) u^*(\xi; X) d\Omega^e = -K^e \left[c(\xi) u(\xi) - \int_{\Gamma^e} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma^e + \int_{\Gamma^e} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma^e \right] \quad (9)$$

Vale ressaltar que o mesmo procedimento pode ser aplicado de forma semelhante ao termo envolvendo Ω_i que o lado esquerdo. Na equação (9), $u(X, t)$ é o potencial escalar e $q(X, t)$ é sua derivada normal; $u^*(\xi; X)$ é a solução fundamental e $q^*(\xi; X)$ é sua derivada normal. Assim, todo o termo difusivo é agora reescrito em termos de integrais de contorno. No entanto, o termo relacionado à inércia acústica precisa ser discretizado de forma semelhante. No trabalho da formulação MECID, o núcleo completo da integral de domínio é interpolado diretamente por funções de base radial, de acordo com a equação (10):

$$\ddot{u}(X, t) u^*(\xi; X) \cong \xi \tilde{\beta}^j F^j(X^j; X) \quad (10)$$

As funções $F^j(X^j; X)$ são funções de interpolação e pertencem à classe das funções radiais (BUHMANN, 2004). Várias classes de funções radiais podem ser usadas, mas entre as mais robustas está a função de base radial de placa fina, que é usada aqui em todas as simulações. Após o processo de discretização, estes pontos X geram os pontos nodais nos quais o potencial $u(X, t)$ é calculado. Para cada ponto de fonte ξ , a interpolação dada pela Eq. (9) corresponde a uma varredura de todos os pontos base X^j relativos aos pontos X do domínio, ponderados pelos coeficientes $\xi \tilde{\beta}^j$. Esses coeficientes podem ser obtidos após a discretização resolvendo um sistema simples de equações algébricas (LOEFFLER *et al.*, 2015; BALISTA *et al.*, 2023). Para evitar singularidades devido a coincidências entre os pontos de fonte e de campo, deve-se considerar o argumento da equação (11):

$$[\ddot{u}(X) - \ddot{u}(\xi)] u^*(\xi; X) \cong \xi \tilde{\beta}^j F^j(X^j; X) \quad (11)$$

Assim, o procedimento é aplicado aos dois termos de domínio na equação (9) adicionando duas integrais auto compensadoras. Utilizando primitivas da função radial original, a integral do termo de inércia acústica torna-se aquela apresentada na equação (12):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\ddot{u}(X) - \ddot{u}(\xi)] u^*(\xi; X) d\Omega &\approx \xi \tilde{\beta}^j \int_{\Omega} F^j(X^j; X) d\Omega = \xi \tilde{\beta}^j \int_{\Omega} \Psi_{,ii}^j(X^j; X) d\Omega \\ &= \xi \tilde{\beta}^j \int_{\Gamma} \Psi_{,i}^j(X^j; X) n_i(X) d\Gamma = \xi \tilde{\beta}^j \int_{\Gamma} \eta^j(X^j; X) d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

Há também o termo excedente, que é imediatamente transportado para o contorno através do Tensor de Galerkin, conforme demonstrado na equação (13):

$$\ddot{u}(\xi) \int_{\Omega} u^*(\xi; X) d\Omega = \ddot{u}(\xi) \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\xi; X) = \ddot{u}(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\xi; X) n_i d\Gamma \quad (13)$$

Os coeficientes β na equação (12) são incógnitas, sendo necessário reescrevê-la em função do potencial $\ddot{u}(X, t)$, usando a seguinte equação:

$$[\xi \ddot{\beta}] = [F]^{-1} [\xi \Lambda] [F] \{\ddot{\beta}\} = [F]^{-1} [\xi \Lambda] \{\ddot{u}\} \quad (14)$$

Na equação (14), $[\Lambda]$ é uma matriz diagonal composta pelos valores da solução fundamental. O procedimento de discretização que se segue é relativamente extenso e pode ser encontrado na referência (SANTOS *et al.*, 2024).

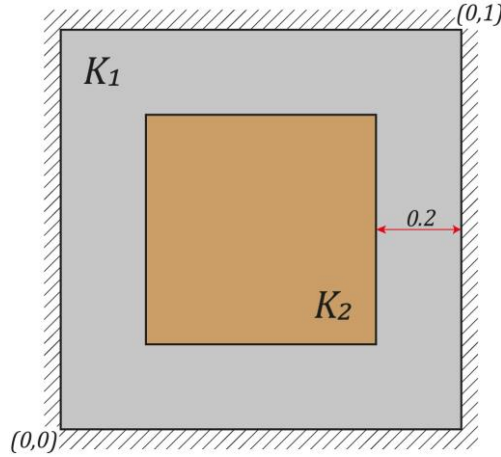
$$\begin{bmatrix} H_{cc} & H_{ci} \\ H_{ic} & H_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0 \\ G_{ic} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_i \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Novamente, na equação (15), mais detalhes sobre cada termo podem ser encontrados na literatura especializada (LARA *et al.*, 2018; BARBOSA E LOEFFLER, 2020; BARCELOS *et al.*, 2021). Assim, a discretização temporal é feita pelo esquema de Houbolt, uma variante da técnica de diferenças finitas, mas especificamente adaptada ao uso do MECID.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Como anteriormente mencionado, a equação governante da onda escalar pode representar a propagação acústica de ondas em um fluido ou a resposta dinâmica de um sólido, inclusive de estruturas esbeltas, como membranas. Para a adequada compreensão do problema físico, este exemplo considera uma membrana quadrada, de dimensões unitárias, rigidamente fixada ao longo de todo o seu contorno. No centro da membrana localiza-se uma sub-região com rigidez distinta, caracterizando a heterogeneidade setorial do sistema. As condições iniciais de deslocamentos e velocidades são nulas. O movimento é induzido por uma fonte unitária volumétrica externa, distribuída uniformemente sobre a região central. O tratamento matemático deste termo não foi mostrado no texto por questões de espaço, mas tanto o MVF quanto o MECID o resolvem facilmente, gerando um termo de coluna matricial simples. A Figura 3 ilustra o problema físico.

Figura 3 – Membrana quadrada com um setor central de rigidez diferente

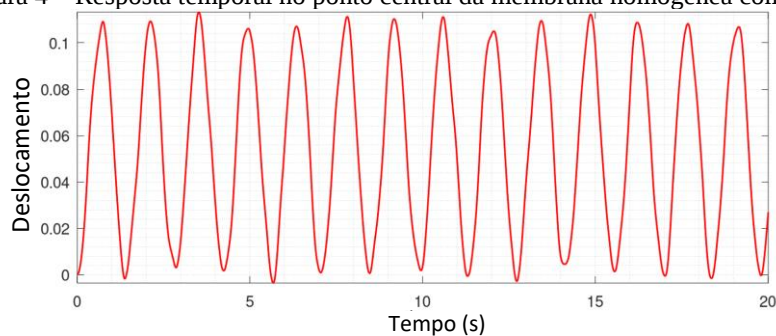


Fonte: Produção do próprio autor.

Apesar da simplicidade deste problema, o código não estruturado do MVF precisa ser testado neste problema regular, uma vez que o algoritmo elaborado para calcular a influência de triângulos adjacentes não é elementar. Além disso, os problemas dinâmicos requerem atenção quanto às condições estáveis para escolher os passos de tempo, o que é confirmado pelos testes preliminares do MVF.

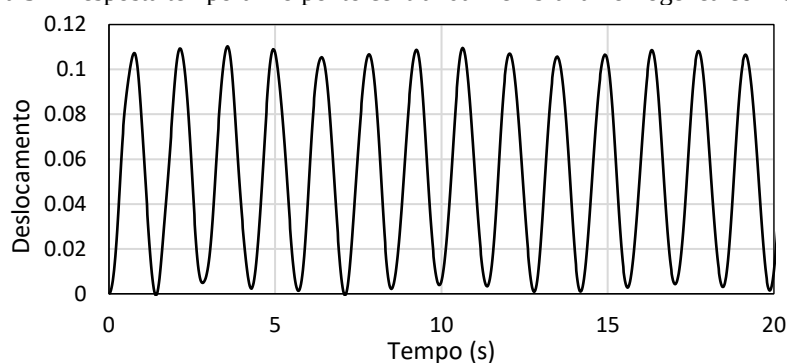
Inicialmente, os resultados são comparados para $K_1 = K_2$ iguais à unidade. Os resultados do deslocamento no ponto central da membrana obtidos com o método do volume finito são apresentados na Figura 4 abaixo, para uma malha com 60 divisões em cada aresta e um passo de tempo igual a 0,05. Os resultados obtidos com MECID para uma malha semelhante, com 320 elementos de contorno lineares e 485 pontos interpoladores internos, utilizando um passo de integração igual a 0,019 segundos, são mostrados na Figura 5.

Figura 4 – Resposta temporal no ponto central da membrana homogênea com o MVF



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 5 – Resposta temporal no ponto central da membrana homogênea com o MECID



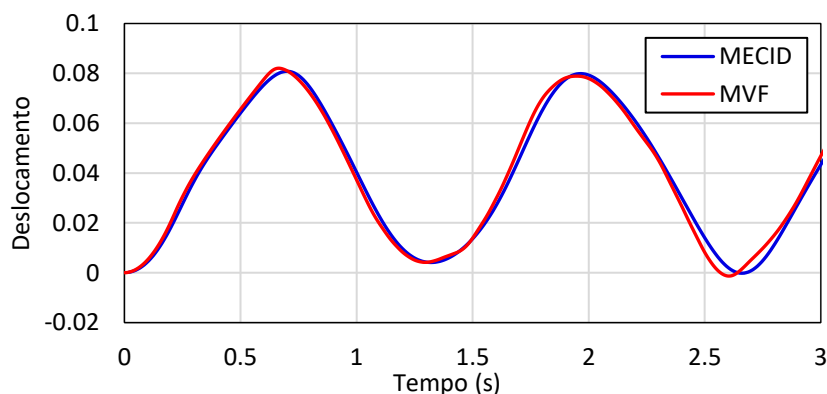
Fonte: Produção do próprio autor.

Como pode ser observado, os resultados obtidos por ambos os métodos são muito semelhantes, apresentando apenas pequenas diferenças de amplitude em determinados picos de resposta. A concordância poderia ser aprimorada com o refinamento da malha, considerando que as malhas utilizadas foram bastante simples para ambos os métodos. Embora não haja solução analítica para comparação, os valores esperados de pico e vale para a resposta dinâmica no ponto central foram confirmados (1s).

Considerando a velocidade de propagação da onda como unitária (já que a rigidez e a massa específica também são unitárias), o instante correspondente ao primeiro pico descreve o tempo necessário para que a onda saia do ponto central, reflita no contorno e retorne à origem.

No segundo teste, a rigidez do setor central é duplicada. A expectativa é que os deslocamentos no ponto central da membrana sejam reduzidos e que o tempo da primeira reflexão seja encurtado, devido ao aumento da velocidade de propagação da onda. A Figura 6 apresenta ambas as respostas no ponto central, obtidas pelo MVF e pelo MECID. As malhas e os passos de tempo utilizados são os mesmos do caso anterior. Os resultados mostraram-se novamente consistentes com as expectativas físicas, uma vez que os deslocamentos máximos diminuíram e o intervalo entre os picos foi reduzido. A concordância entre os métodos é evidente.

Figura 6 – Comparação da resposta temporal no ponto central da membrana setorial com $K_1 = 1$ e $K_2 = 2$ entre MVF e MECID



Fonte: Produção do próprio autor.

No que se refere à formulação MECID, a integração entre as aproximações de base radial e a Técnica de Superposição (empregada para tratar as diferentes propriedades) foi considerada bem-sucedida, dada a concordância com os resultados do MVF. A Técnica de Superposição apresenta-se como uma alternativa eficaz à tradicional técnica de sub-regiões, sendo mais precisa devido à maior interatividade entre os diferentes setores, ao contrário das sub-regiões, que particionam o domínio de maneira semelhante ao Método dos Elementos Finitos. Essa formulação havia sido empregada anteriormente apenas em problemas de Helmholtz para o cálculo de frequências em modelos bidimensionais e tridimensionais; aqui, é utilizada pela primeira vez em problemas de resposta dinâmica segmentados.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve dois objetivos principais. Primeiro, verificar a correção do algoritmo desenvolvido para um modelo de volume finito bidimensional não estruturado, capaz de representar geometrias não regulares e de se adaptar a situações que impediavam a densificação da discretização em regiões com maiores gradientes de propriedade ou mesmo das variáveis de estado de um dado problema. O modelo clássico do MVF é relativamente simples de implementar, apesar das variações que podem ser identificadas na literatura especializada, mas o esquema algorítmico capaz de modelar geometrias irregulares é mais complexo. Ele apresenta desafios bastante específicos relacionados às estratégias de interação entre volumes finitos adjacentes, o que impacta a precisão. O modelo aqui proposto pôde ser testado nesses casos dinâmicos antes de ser devidamente aplicado a problemas mais desafiadores relacionados à formação linear. Os resultados obtidos mostraram boa concordância com as soluções de elementos de contorno.

Além disso, o modelo de Interpolação Direta foi testado, pela primeira vez, em conjunto com a técnica de superposição de domínio para resolver problemas de dinâmica em meios heterogêneos segmentados. Esses resultados iniciais foram encorajadores e motivaram sua aplicação a casos ainda mais desafiadores, incluindo setores com mudanças graduais na heterogeneidade, além dos testados, nos quais a heterogeneidade é exclusivamente setorial. A solução numericamente bem-sucedida de tais problemas heterogêneos – em princípio inadequada para uma técnica baseada na discretização de contorno – abre novas perspectivas de pesquisa e novas aplicações.

6. REFERÊNCIAS

- BALISTA, T.G.; LOEFFLER, C.F.; LARA, L.O.C.; MANSUR, W.J. Comparisons Between Direct Interpolation and Reciprocity Techniques of the Boundary Element Method for Solving Two-Dimensional Helmholtz Problems. **Engineering Computations**. Vol. 40(9/10), pp. 2841-2861, 2023.
- BARBOSA, J.P.; LOEFFLER, C.F. Application of Boundary Element Method superposition technique for solving natural frequencies in piecewise homogeneous domains. **Computers & Mathematics with applications**, 79(4), pp. 1131-1144, 2020.
- BARCELOS, H.M.; LOEFFLER, C.F.; LARA, L.O.C. The direct interpolation boundary element method and the domain superposition technique applied to piecewise Helmholtz's problems with internal heterogeneity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 131, pp. 41-50, 2021.
- BATHE, K.J. **Finite Element Procedures in Engineering**. Analysis. Prentice-Hall, 1982.
- BREBBIA C.A.; WALKER S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. Elsevier, 1980.
- BUHMANN, M.D. **Radial Basis Functions**. [S.l.]: Cambridge, 2004.
- DANU, V.; TENAUD, C. High Order One Step Monotonicity-Preserving Schemes for Unsteady Compressible Flow Calculations. **Journal of Computational Physics**, vol. 193, pp. 563-594, 2004.
- GRAFF, K.F. **Wave motion in elastic solids**. Dover Publications, 1994.
- HILDEBRAND, F.B. **Methods of Applied Mathematics**. Dover Pub., New York, 1965.
- LARA, L.O.C.; LOEFFLER, C.F.; BARBOSA, J.P.; MANSUR, W.J. The technique of domain superposition to solve piecewise homogeneous elastic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 94, pp. 1-9, 2018.
- LOEFFLER, C.F.; CRUZ, A.L.; BULCÃO, A. **Direct use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol. 50, pp. 97-108, 2015.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. **Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method**. In: C.A. Brebbia Ed, *Proceedings of BEM*, pp. 719-730, 1983.
- OLIVEIRA, P.C. Esquema FLUX-SPLINE aplicado em cavidades abertas com convecção natural. **Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica**, Unicamp, 1997.
- PATANKAR, S.V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

SANTOS, G.A.R.; LOEFFLER, C.F; BULCÃO, A.; LARA, L. O. C. The Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Acoustic Wave Problems in the Time Domain. **Computational & Applied Mathematics**. Vol 44, pp. 1-30, 2024.

STEWART, J. **Cálculo**. Pioneira Thomson Learning, 7ed., Vol. 2, 2009.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), ao Centro Tecnológico (CT/UFES) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) pelo suporte institucional. Agradecem também à CAPES (processo: 88887.828677/2023-00) pelo apoio financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa. Por fim, agradecem ao LabTecMec-UFES pelo patrocínio ao evento.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.