

# APLICAÇÃO DO MECID COMO SOLUCIONADOR DIRETO PARA O MÉTODO MCMC EM PROBLEMAS GOVERNADOS PELA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO

Filipe Lopes Cruzeiro\*, [filipe.cruzeiro@edu.ufes.br](mailto:filipe.cruzeiro@edu.ufes.br)  
Carlos Friedrich Loeffler Neto\*, [loefflercarlos@gmail.com](mailto:loefflercarlos@gmail.com)  
Lucas Silveira Campos\*, [lucas.s.campos@ufes.br](mailto:lucas.s.campos@ufes.br)  
Luciano de Oliveira Castro Lara\*, [luciano.lara@ufes.br](mailto:luciano.lara@ufes.br)  
Wellington Betencurte da Silva\*, [wellinton.betencurte@ufes.br](mailto:wellinton.betencurte@ufes.br)

Departamento de engenharia mecânica, Universidade Federal do espírito Santo, Av. Fernando Ferrari, Vitória, 29075-910, Espírito Santo, Brasil

**Resumo.** A precisão na solução de problemas inversos por meio do Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) está diretamente ligada à exatidão do método direto empregado, uma vez que aproximações numéricas mais precisas tendem a gerar estimativas mais confiáveis das variáveis de interesse. Muitos fenômenos físicos relevantes, como transferência de calor, campos elétricos e magnéticos e escoamentos em meios porosos, são governados pela equação de Laplace, uma equação diferencial parcial de natureza auto-adjunta amplamente estudada e aplicada em diferentes áreas da engenharia e da física. Nesse contexto, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) se destaca como uma técnica numérica eficiente, pois reformula o problema governado por equações diferenciais parciais em termos de integrais de contorno, eliminando a necessidade de discretização do domínio e reduzindo significativamente o esforço computacional. O objetivo deste trabalho é investigar o uso do MEC na solução de problemas inversos regidos pela equação de Laplace, empregando o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov como estratégia de estimativa para parâmetros desconhecidos. Para isso, adota-se a formulação de Integração Direta do MEC (MECID), que oferece elevada precisão ao lidar com os termos integrais associados aos efeitos de domínio, sem requerer aproximações adicionais que possam comprometer a qualidade das soluções. Os resultados obtidos demonstram que a combinação entre MCMC e MECID constitui uma abordagem robusta e altamente precisa para a solução de problemas inversos, evidenciando que a elevada acurácia do MEC contribui de forma decisiva para a qualidade das estimativas, além de reforçar seu potencial como ferramenta eficaz em aplicações envolvendo fenômenos governados pela equação de Laplace.

**Palavras-chave:** Problemas Inversos. Método dos elementos de contorno. Transferência de calor.

## 1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de fenômenos físicos representa um marco fundamental na evolução da engenharia. A aplicação de métodos numéricos para resolver tais problemas tornou-se indispensável em praticamente todos os ramos da engenharia. Entre as diversas técnicas disponíveis para a discretização e solução das equações diferenciais que regem os sistemas físicos, destacam-se quatro abordagens bem estabelecidas: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Cada um desses métodos possui características específicas que os tornam mais adequados a determinadas classes de problemas. Consequentemente, a escolha da técnica mais apropriada cabe ao pesquisador e deve basear-se nas particularidades do modelo físico em estudo e nos objetivos da análise (BREBBIA; WALKER, 2016; MARTINS, 2012).

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é amplamente utilizado na engenharia devido à sua simplicidade conceitual e ampla aplicabilidade. Esse método consiste em discretizar o domínio do problema em pequenas partes, chamadas elementos, que trocam informações para representar o comportamento físico do sistema. Sua base matemática está na série de Taylor truncada, que permite aproximar soluções de equações diferenciais por meio de equações simplificadas, com um erro associado ao truncamento da série (CHAPRA; CANALE, 2016). Apesar de sua formulação direta, o MDF é mais adequado para geometrias regulares e condições de contorno bem definidas, o que limita sua aplicação em problemas complexos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica computacional poderosa e amplamente consolidada na engenharia. Sua formulação baseia-se em métodos variacionais clássicos e técnicas de resíduos ponderados, permitindo representar a solução de uma equação diferencial como uma combinação linear de funções de forma  $\phi_j$  e coeficientes  $c_j$  ajustados para satisfazer a equação em um sentido integral ponderado (REDDY; GARTLING, 2010). A principal vantagem do MEF está em sua capacidade de representar domínios com geometrias irregulares, razão pela qual é amplamente empregado em softwares comerciais como Ansys e Abaqus. No entanto, o MEF requer a discretização de todo o domínio, o que pode demandar elevado custo computacional em tempo e recursos. Além disso, sua precisão

depende fortemente da qualidade da malha, apresentando limitações no tratamento de domínios infinitos e no cálculo preciso de derivadas (KATSIKADELIS, 2016).

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), por outro lado, oferece vantagens significativas em relação a outros métodos numéricos. Uma de suas principais características é que a discretização é realizada apenas ao longo dos contornos do domínio, reduzindo drasticamente o número de elementos e equações envolvidas. Essa propriedade torna o MEC particularmente eficiente em problemas com domínios infinitos ou semi-infinitos, pois utiliza soluções fundamentais como funções de ponderação. Além disso, o MEC apresenta alta precisão no cálculo de derivadas, lida com forças e momentos concentrados com facilidade e permite avaliar a solução em qualquer ponto do domínio por meio de expressões integrais contínuas e diferenciáveis. Essas propriedades tornam o MEC uma ferramenta poderosa para o tratamento de problemas envolvendo trincas, singularidades e contornos complexos, destacando-se como um método robusto em modelagem numérica avançada (KATSIKADELIS, 2016).

O Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID) é uma técnica numérica avançada que utiliza funções de base radiais para aproximar integrais de domínio em problemas de campo escalar, como as equações de advecção-difusão, Poisson e Helmholtz. Diferentemente do método clássico, que depende de soluções fundamentais específicas, e do Método da Dupla Reciprocidade (MECDR), que pode perder precisão em problemas dominados por advecção, o MECID interpola diretamente o núcleo integral, melhorando a estabilidade e a precisão (SANTOS; LOEFFLER; LARA, 2024; LOEFFLER; RAMOS, 2023).

Há mais de cinco décadas, os problemas inversos têm atraído grande interesse em diversas áreas da ciência e da engenharia, encontrando ampla aplicação nas engenharias mecânica, aeroespacial, química, nuclear, estatística e astrofísica (ORLANDE, 2011). No contexto da transferência de calor, os Problemas Inversos de Transferência de Calor (IHTPs) ganharam destaque durante a era espacial, especialmente na estimativa de temperaturas superficiais de escudos térmicos durante a reentrada atmosférica, onde sensores não podem ser instalados diretamente na superfície aquecida. Avanços tecnológicos recentes intensificaram o uso de medições indiretas e experimentos sofisticados para estimar propriedades termofísicas que variam com a temperatura e a posição, tornando os métodos convencionais inadequados.

Os problemas inversos são classificados como mal postos, pois violam uma ou mais das condições de Hadamard: existência, unicidade e estabilidade. Mesmo quando uma solução fisicamente plausível existe, a unicidade e a estabilidade frente ao ruído experimental nem sempre são garantidas (TIKHONOV; ARSENIN, 1977). Isso exige o uso de técnicas de regularização, como a regularização de Tikhonov, a regularização iterativa de Alifanov (ALIFANOV, 1970) e o método sequencial de Beck. Essas abordagens reavivaram o interesse na área ao permitir soluções aproximadas estáveis. Mais recentemente, técnicas estocásticas e inferência bayesiana têm se destacado, reformulando a solução dos problemas inversos como uma inferência estatística sobre distribuições de probabilidade a posteriori (BENNING; BURGER, 2018).

Além das aplicações clássicas, como a estimativa de fluxo de calor desconhecido a partir de medições internas, os IHTPs abrangem problemas mais complexos, incluindo tomografia térmica e previsão dinâmica de estados, como na meteorologia. A metodologia de problemas inversos também foi incorporada ao paradigma de verificação e validação de códigos computacionais (V&V), conforme os padrões da ASME (ORLANDE, 2011). Diferentemente da validação tradicional, a análise inversa promove uma interação sinérgica entre modelagem teórica e dados experimentais. A análise de resíduos e a consideração de incertezas nos parâmetros assumidos permitem avaliar a adequação do modelo e da solução direta, consolidando os IHTPs como ferramenta essencial na engenharia térmica moderna.

A solução de um problema inverso depende fundamentalmente do método direto associado. A qualidade da solução inversa está diretamente ligada à precisão, estabilidade e eficiência numérica do método direto empregado, já que a estimativa das variáveis desconhecidas é realizada por meio de simulações sucessivas da solução direta, garantindo resultados fisicamente consistentes e numericamente robustos (OZISIK; ORLANDE, 2018).

Nesse contexto, o presente trabalho propõe o uso do Método dos Elementos de Contorno (MEC) como método direto associado a uma abordagem inversa baseada no Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) (METROPOLIS et al., 1953; HASTINGS, 1970). A análise é voltada para problemas regidos pela equação de Laplace, amplamente aplicável na engenharia e nas ciências aplicadas, descrevendo fenômenos como transferência de calor em regime estacionário, campos elétricos e magnéticos em meios homogêneos e escoamentos em meios porosos na ausência de fontes. A escolha do MEC se justifica por sua capacidade de tratar domínios complexos com alta precisão nas fronteiras, sendo especialmente vantajoso em problemas inversos, onde a discretização apenas no contorno é suficiente. Já o método MCMC, no contexto bayesiano, permite a estimativa probabilística de quantidades desconhecidas, incorporando incertezas e produzindo soluções mais robustas diante de ruídos experimentais. Dessa forma, a investigação da associação entre MEC e MCMC representa uma estratégia promissora para a solução de problemas inversos governados pela equação da difusão.

## 2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A equação de difusão no regime transiente pode ser escrita como apresentado na equação (1) (PARTRIDGE et al., 2012):

$$\alpha u_{,ii} = \dot{u}, \quad (1)$$

Na equação (1),  $\alpha$  representa a difusividade térmica do material, e  $u$  o potencial. A partir dessa equação, obtém-se a formulação integral no tempo e no espaço, dada pela equação (2)

$$\alpha \int_{\Omega} \int_0^{T^+} u_{,ii} u^* dt d\Omega = \int_{\Omega} \int_0^{T^+} \dot{u} u^* dt d\Omega. \quad (2)$$

Aqui, 0 indica o tempo inicial,  $T^+$  o tempo final de integração, e  $u^*$  é a solução fundamental do problema.

O lado esquerdo da equação (2) pode ser desenvolvido seguindo a formulação tradicional do Método dos Elementos de Contorno (MEC), resultando na equação (3):

$$\alpha \int_{\Omega} \int_0^{T^+} u_{,ii} u^* dt d\Omega = \int_0^{T^+} \int_{\Omega} u_{,ii} u d\Omega dt - \int_0^{T^+} \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma dt + \int_0^{T^+} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma dt, \quad (3)$$

e o lado direito da equação (2), resulta na equação (4),

$$\int_{\Omega} \int_0^{T^+} \dot{u} u^* dt d\Omega = \int_{\Omega} [uu^*]_0^{T^+} d\Omega - \int_{\Omega} \int_0^{T^+} \dot{u} u^* dt d\Omega \quad (4)$$

O desenvolvimento segue de forma análoga à formulação tradicional do MEC.

Reagrupando as equações (3) e (4), obtém-se a equação (5).

$$\int_0^{T^+} \int_{\Omega} (\alpha u_{,ii} + \dot{u}) u d\Omega dt = \alpha \int_0^{T^+} \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma dt - \alpha \int_0^{T^+} \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma dt + \int_{\Omega} [uu^*]_0^{T^+} d\Omega. \quad (5)$$

Aplicando as propriedades da função Delta de Dirac, juntamente com a forma integral do problema fundamental, tem-se a equação (6):

$$\int_0^{T^+} \int_{\Omega} u \Delta(T; t) \Delta(\xi; x) d\Omega dt = u(\xi, T^+). \quad (6)$$

Assim, a forma final da equação em sua forma inversa é dada pela equação (7) (PARTRIDGE et al., 2012):

$$c(\xi) u(\xi, T^+) + \alpha \int_{\Gamma} \int_0^{T^+} u q^* dt d\Gamma = \alpha \int_{\Gamma} \int_0^{T^+} q u^* dt d\Gamma + \left[ \int_{\Omega_0} u_0^* d\Omega \right], \quad (7)$$

Onde:

$$\begin{cases} c(\xi) = 1, & \text{Se } \xi \text{ está no interior do domínio;} \\ c(\xi) = \theta_{int}/2\pi, & \text{se } (\xi) \text{ está sobre o contorno;} \\ c(\xi) = 0, & \text{se } (\xi) \text{ não pertence ao domínio nem ao contorno.} \end{cases}$$

Quando o ponto-fonte está localizado em uma região suave da fronteira, isto é, não em um canto, o ângulo interno local é  $\pi$ , resultando na equação (8)

$$c = \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

A parte de contorno do método pode ser facilmente discretizada e desenvolvida pelo MEC. Entretanto, permanece um termo de integração sobre o domínio, que precisa ser convertido para o contorno. Para isso, utiliza-se uma técnica especial aplicada a essa equação. Neste trabalho, aplica-se a técnica de interpolação direta (DOS SANTOS et al., 2025; SANTOS et al., 2024; LOEFFLER; RAMOS, 2025). No estudo de Loeffler e Ramos, é apresentado o Método de Interpolação Direta (MECID) para o tratamento de problemas de difusão transiente em formulações de contorno. Ao aproximar integralmente o núcleo do termo transiente por meio de funções radiais de interpolação, o MECID reduz as restrições associadas ao passo de tempo típicas da formulação por dupla reciprocidade (MECDR). Resultados numéricos comparativos indicam que o MECID oferece maior robustez e estabilidade numérica, fornecendo soluções transientes mais consistentes que as obtidas pelo MECDR (LOEFFLER; RAMOS, 2025).

### 3. MÉTODO DE MONTE CARLO VIA CADEIAS DE MARKOV (MCMC)

O método Markov Chain Monte Carlo (MCMC) é uma técnica poderosa usada para gerar amostras de distribuições de probabilidade complexas, especialmente quando abordagens convencionais são inviáveis. A base dessa técnica está no conceito de cadeias de Markov, que são processos estocásticos nos quais a probabilidade de transição para um estado futuro depende apenas do estado atual e não da trajetória anterior. Essa propriedade, conhecida como propriedade de Markov, pode ser expressa conforme descrito na equação (9) (OZISIK; ORLANDE, 2018):

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = y | X_n = x), \quad (9)$$

onde  $x, y \in S$  sendo  $S$  o espaço de estados. Quando a matriz de transição  $P$ , composta pelas probabilidades  $p(x,y)$ , não varia no tempo, diz-se que a cadeia é homogênea. Um conceito central nos métodos MCMC é a distribuição estacionária  $\pi$ , definida como a distribuição que satisfaz a equação (10):

$$\pi P = \pi, \quad (10)$$

o que significa que a distribuição dos estados permanece inalterada após sucessivas aplicações da matriz de transição. No contexto do MCMC, uma das estratégias mais consolidadas é o algoritmo de Metropolis-Hastings, proposto originalmente em 1953 e estendido por Hastings em 1970 (METROPOLIS et al., 1953; HASTINGS, 1970). Esse algoritmo constrói uma cadeia de Markov com reversibilidade garantida em relação à distribuição alvo  $\pi$  e, sob certas condições — como irreducibilidade e aperiodicidade —, assegura a convergência para uma cadeia ergódica com distribuição de equilíbrio única.

Na prática, demonstrar que uma cadeia possui essas propriedades é, em geral, não trivial, especialmente quando os parâmetros do modelo estão fortemente correlacionados ou exibem dependência linear. Nessas situações, a cadeia pode apresentar comportamento periódico ou alta autocorrelação, dificultando a convergência para  $\pi$ .

A construção da cadeia de Metropolis-Hastings baseia-se na geração de amostras a partir de uma densidade de proposta  $h(P)$  usando um esquema de aceitação e rejeição. Dado que a densidade alvo  $p(P) \propto \tilde{p}(P)$ , com  $\tilde{p}(P) \leq c h(P)$  para alguma constante  $c$ , o procedimento é o seguinte:

1. Gerar uma proposta  $P^* \sim h(P)$ ;
2. Gerar um número aleatório  $U \sim U(0,1)$ ;
3. Se  $U \leq (\tilde{p}(P^*)/ch(P^*))$ , aceitar  $\tilde{p}$  como amostra válida; caso contrário, rejeitar e reiniciar o processo.

Esse processo permite amostrar corretamente distribuições com constantes de normalização desconhecidas, característica comum em problemas inversos. Além disso, o método é eficaz mesmo quando a função objetivo possui múltiplos mínimos locais, oferecendo uma alternativa robusta e estatisticamente consistente para inferência em sistemas complexos.

#### 4. ALGORITMO PARA IDENTIFICAÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA VIA MCMC UTILIZANDO O MEC COMO MÉTODO DIRETO

A identificação de propriedades térmicas, como a condutividade térmica, a partir de dados experimentais indiretos, caracteriza-se como um problema inverso frequentemente mal condicionado. Para solucioná-lo de forma eficaz, é essencial combinar um método direto robusto com um procedimento estatístico confiável. Nesse contexto, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método de Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC) formam uma combinação promissora.

O MEC apresenta vantagens significativas em relação a métodos numéricos clássicos, especialmente em problemas regidos pela equação de Laplace, que descreve fenômenos como condução de calor estacionária, potenciais elétricos e magnéticos e escoamento em meios porosos. Destacam-se a necessidade de discretizar apenas os contornos, a alta precisão nas derivadas de campo e a boa adaptação a geometrias complexas, resultando em sistemas lineares menores e de menor custo computacional.

O MCMC, em especial o algoritmo de Metropolis-Hastings, oferece uma estrutura estatística robusta para estimar parâmetros incertos com base em observações ruidosas, permitindo amostragem direta da distribuição a posteriori e quantificação da incerteza das estimativas — aspecto essencial em problemas inversos mal condicionados. Assim, ao integrar o MEC como solucionador direto no esquema MCMC, aproveita-se a precisão numérica do MEC e a flexibilidade probabilística do MCMC, possibilitando a resolução eficiente do problema inverso, mesmo com dados escassos ou ruidosos.

O algoritmo a seguir descreve o procedimento adotado para identificar a condutividade térmica a partir de medições internas de temperatura, utilizando o MEC na etapa de propagação direta e o MCMC para atualização Bayesiana dos parâmetros:

1. Definir o tempo e os parâmetros iniciais
  - a.  $\Delta t, t_f, t \leftarrow$  vetor de tempo
  - b.  $K_{min}, K_{max} \leftarrow$  limites admissíveis da condutividade
  - c.  $\sigma \leftarrow$  incerteza das medições
  - d.  $K_{old} \leftarrow$  estimativa inicial da condutividade  $K$
2. Construir a malha e preparar os dados do problema direto (MEC):
  - a.  $Malha \leftarrow$  gerar geometria e malha
  - b.  $condutividade \leftarrow K_{old}$
  - c.  $H_t, G_t \leftarrow$  calcular integrais fundamentais

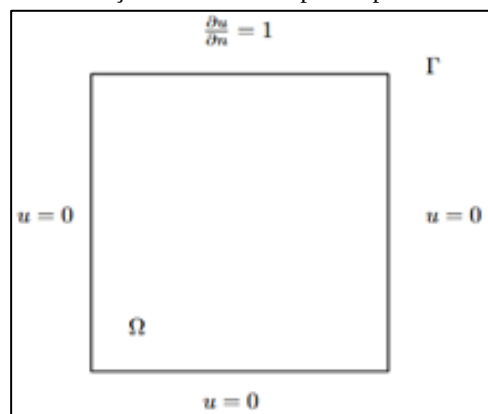
- d.  $M \leftarrow$  matriz de massa
- e.  $A, b \leftarrow$  aplicar condições de contorno
3. Resolver o problema direto dependente do tempo:  
Para  $i$  de 4 até número\_de\_pontos\_no\_tempo, faça:
  - a. Resolver o sistema linear:  $A * x = b + M * T_{(anterior)}$
  - b. Atualizar o vetor de temperatura  $T$  com a nova solução
4. Carregar os dados experimentais  $Y_m$
5. Calcular a verossimilhança inicial:
  - a.  $like\_old \leftarrow$  erro quadrático entre  $T$  e  $Y_m$
  - b.  $post\_old \leftarrow$  verossimilhança + termo de regularização Bayesiana
6. Iniciar o algoritmo de Metropolis–Hastings:  
Para  $i$  de 1 até  $nstate$ , faça:
  - a. Propor novo  $K_{new} = K_{old} + \text{ruído}$
  - b. Se  $K_{new} \in [K_{min}, K_{max}]$ , então:
    - i. Atualizar o parâmetro de condutividade:  $dad.k \leftarrow K_{new}$
    - ii. Recalcular  $H_t, G_t, M, A, b$  e resolver para  $T$
    - iii. Calcular  $like\_new$  e  $post\_new$
    - iv. Se  $\log(\text{aleatório\_uniforme}()) < (post\_new - post\_old)$ , então:
      1. Aceitar novo estado:  $K_{old} \leftarrow K_{new}$
      2. Armazenar valores aceitos (posterior,  $K_{est}$ , etc.)

## 5. SIMULAÇÃO

Nesta seção, um problema inverso é resolvido utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) como solucionador direto, combinado com o método MCMC. Para esse propósito, considera-se um problema de transferência de calor com condutividade térmica desconhecida.

Na proposta inicial, é avaliado um caso com solução analítica: uma placa quadrada com temperatura prescrita nas laterais e na base, e fluxo de calor prescrito na borda superior, conforme mostrado na Figura 1. Como condição inicial, a temperatura da placa é definida como zero em todo o domínio.

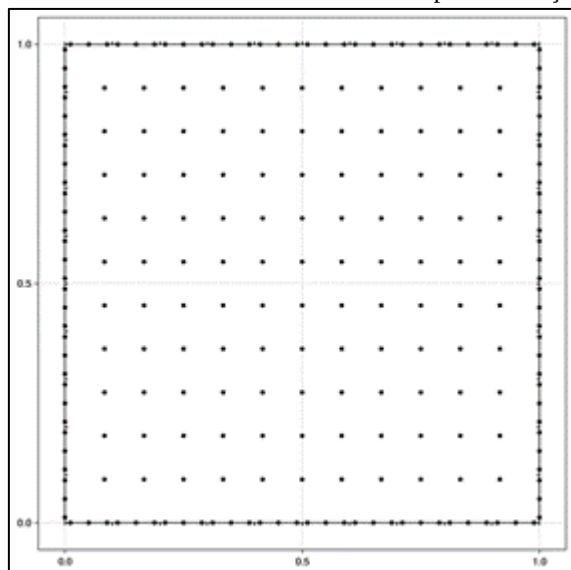
Figura 1– Condições de contorno para o problema analisado



Fonte: Produção do próprio autor.

Para as análises, a mesma malha é adotada em todas as simulações. É importante destacar que o MEC discretiza apenas os contornos ( $\Gamma$ ), enquanto pontos internos podem ser adicionados dentro do domínio conforme necessário para a análise. Em todas as simulações foi empregada a mesma malha: 40 elementos de contorno, todos quadráticos e descontínuos, juntamente com 110 pontos internos. A malha utilizada é ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Malha dos elementos de contorno utilizada para a solução do problema



Fonte: Produção do próprio autor.

### 5.1. GERAÇÃO DE DADOS PARA A SIMULAÇÃO

Neste trabalho, os dados foram gerados numericamente a partir da solução analítica do problema. No entanto, um termo de erro foi adicionado a fim de simular as incertezas experimentais.

A solução analítica da equação de difusão unidimensional, para uma placa plana de espessura  $L$ , com temperatura inicial nula e superfícies mantidas a temperatura constante, é dada pela equação (11):

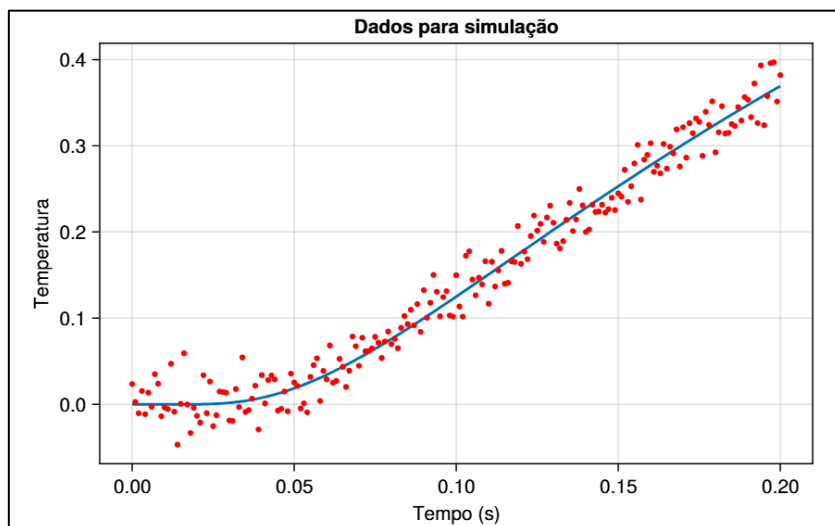
$$T(y, T) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 \alpha t}{4L^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(2k+1)\pi y}{2L}\right), \quad (11)$$

onde,

- $T(y, t)$  – temperatura adimensional na posição  $y$  e no instante  $t$ ;
- $y$  – posição ao longo da espessura da placa, com  $0 \leq y \leq L$ ;
- $t$  – tempo;
- $\alpha$  – difusividade térmica do material ( $\alpha = k / (\rho c_p)$ ), em  $m^2/s$ ;
- $L$  – semi-espessura da placa (m);
- $k$  – índice da série de Fourier ( $k \in \mathbb{N}_0$ ).

Um exemplo dos dados utilizados para simulação pode ser observado na Figura 3:

Figura 3 – Exemplo de dados para a análise

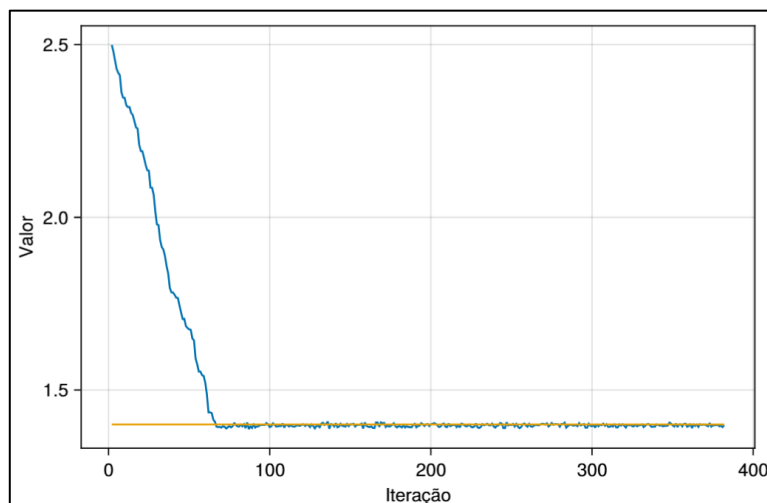


Fonte: Produção do próprio autor.

## 5.2. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

O problema descrito anteriormente é resolvido várias vezes com os mesmos parâmetros. Os últimos 100 valores obtidos são utilizados para calcular a média, que é então considerada como o valor estimado, juntamente com o respectivo desvio padrão. Na Figura 4 é mostrada uma das simulações. Para essa simulação, foi adotado o valor  $\alpha = 1,4$ .

Figura 4 – Processo de determinação da difusividade térmica



Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 4, observa-se que o valor inicial de  $\alpha$  é igual a 2,5 na primeira iteração, e gradualmente converge para o valor esperado após algumas dezenas de iterações. Após esse período de convergência, todas as iterações subsequentes permanecem próximas do valor esperado (1,4).

Para cada conjunto de dados, o mesmo processo é repetido 10 vezes para garantir a estabilidade do método. Além disso, é introduzido no algoritmo um parâmetro denominado Cutoff weight, que determina se o próximo estado será ou não aceito. Dois valores são considerados para esse parâmetro: o primeiro ( $5,00 \times 10^{-2}$ ) resulta em menos estados aceitos, enquanto o segundo ( $5,00 \times 10^{-3}$ ) permite que mais estados sejam aceitos. O objetivo é avaliar qual escolha fornece os melhores resultados para o problema estudado.

Na Tabela 1, observa-se que, de um total de 2000 estados testados, apenas cerca de 200 foram aceitos, e, dentre esses, somente os últimos 100 foram utilizados para estimar o valor. Conforme mostrado na tabela, o erro entre o valor-alvo e o valor estimado é inferior a 1% em todas as simulações, sendo o pior erro de 0,55% e o melhor de 0,47%, o que demonstra uma boa estabilidade do método.

Tabela 1 – Resultados da simulação com  $w_k = 5,00 \times 10^{-2}$

| Simulação | Estados aceitos | Valor-alvo | Valor estimado | Desvio padrão | Erro (%) |
|-----------|-----------------|------------|----------------|---------------|----------|
| 1         | 212             | 1,4        | 1,39340        | 0,00374       | 0,47     |
| 2         | 204             | 1,4        | 1,39230        | 0,00388       | 0,55     |
| 3         | 226             | 1,4        | 1,39260        | 0,00381       | 0,53     |
| 4         | 219             | 1,4        | 1,39259        | 0,00475       | 0,53     |
| 5         | 219             | 1,4        | 1,39304        | 0,00431       | 0,50     |
| 6         | 191             | 1,4        | 1,39249        | 0,00360       | 0,54     |
| 7         | 225             | 1,4        | 1,39301        | 0,00474       | 0,50     |
| 8         | 208             | 1,4        | 1,39289        | 0,00334       | 0,51     |
| 9         | 184             | 1,4        | 1,39251        | 0,00393       | 0,54     |
| 10        | 200             | 1,4        | 1,39292        | 0,00446       | 0,51     |

Fonte: Produção do próprio autor.

No segundo processo, o Cutoff weight é definido como  $5,00 \times 10^{-3}$ , o que permite que um número maior de estados seja aceito. Os resultados são apresentados na Tabela 2. Nesse caso, embora mais estados tenham sido aceitos, o erro aumentou, sendo o menor 0,81% e o maior 0,85%. Isso mostra que, apesar do maior número de estados aceitos, sua qualidade pode ser inferior, resultando em piores resultados.

Tabela 2 – Resultados da simulação com  $w_k = 5,00 \times 10^{-3}$

| Simulação | Estados aceitos | Valor-alvo | Valor estimado | Desvio padrão | Erro (%) |
|-----------|-----------------|------------|----------------|---------------|----------|
| 1         | 404             | 1,4        | 1,38872        | 0,00391       | 0,81     |
| 2         | 401             | 1,4        | 1,38856        | 0,00393       | 0,82     |
| 3         | 400             | 1,4        | 1,38815        | 0,00425       | 0,85     |
| 4         | 369             | 1,4        | 1,38840        | 0,00368       | 0,83     |
| 5         | 390             | 1,4        | 1,38809        | 0,00365       | 0,85     |
| 6         | 405             | 1,4        | 1,38841        | 0,00425       | 0,83     |
| 7         | 400             | 1,4        | 1,38821        | 0,00391       | 0,84     |
| 8         | 391             | 1,4        | 1,38817        | 0,00423       | 0,85     |
| 9         | 386             | 1,4        | 1,38826        | 0,00416       | 0,84     |
| 10        | 384             | 1,4        | 1,38805        | 0,00441       | 0,85     |

Fonte: Produção do próprio autor.

## 6. CONCLUSÃO

O presente trabalho investigou a aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC), em sua formulação de Integração Direta (MECID), combinado com o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), para a resolução de problemas inversos regidos pela equação de Laplace. Os resultados obtidos demonstraram que a precisão da solução inversa depende fortemente da robustez do método direto empregado. Ao adotar o MECID, a formulação numérica alcançou alta precisão no tratamento dos efeitos de contorno e de domínio, garantindo que as estimativas obtidas por meio do MCMC convergissem com margens de erro reduzidas e elevada estabilidade.

Além disso, a análise de diferentes valores do parâmetro cutoff weight revelou a influência do critério de aceitação no comportamento de convergência e na precisão das soluções. Embora um valor mais restritivo do cutoff reduza o número de estados aceitos, ele resulta em menores erros, confirmando a importância de ajustar cuidadosamente esse parâmetro para equilibrar a taxa de aceitação e a qualidade da solução.

De modo geral, a integração entre o MEC e o MCMC mostrou-se uma estratégia promissora e confiável para a resolução de problemas inversos governados pela equação de Laplace. Trabalhos futuros podem estender essa metodologia para sistemas físicos mais complexos, incluindo fenômenos não lineares e problemas transientes, ampliando ainda mais a aplicabilidade da abordagem.

## 7. REFERÊNCIAS

- ALIFANOV, O.M. **Regularization of variational forms of inverse heat conduction problems**. In: Ozisik, M.N.; Orlande, H.R.B. (eds.) *Inverse Heat Transfer Problems*.
- BENNING, Martin; BURGER, MARTIN. **Modern regularization methods for inverse problems**. *Acta numerica*, v. 27, p. 1-111, 2018.
- BREBBIA, C.A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. Elsevier, Berlin, 2016.
- CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. **Métodos Numéricos Para Engenharia**. 7ª ed. McGraw Hill Brasil, São Paulo, 2016.
- HASTINGS, W.K. **Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications**. *Biometrika*, Volume 57, Issue 1, Pages 97–109, (1970).
- KATSIKADELIS, J.T. **The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications**. Academic Press, London, 2016.
- LOEFFLER, C.F.; RAMOS, J.R.S. **Solution of transient diffusive problems using the direct interpolation technique**. *Journal of Engineering Research*, v.3, n.26, 2023. DOI: 10.22533/at.ed.3173262301084.
- MARTINS, J.B. **Numerical Methods in Geomechanics: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute**, vol. 92. Braga, Portugal, 2012.
- METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W.; ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H.; TELLER, E. **Equation of state calculations by fast computing machines**. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6): 1087–1092, 1953.
- ORLANDE, H.R.B. **Inverse problems in heat transfer: New trends on solution methodologies and applications**. In: *Proceedings of the 14th International Heat Transfer Conference*, pp. 379–398. ASME, 2011.



OZISIK, M.N.; ORLANDE, H.R.B. **Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications**. 2<sup>a</sup> ed. Routledge, New York, 2018.

PARTRIDGE, P.W.; BREBBIA, C.A.; WROBEL, L.C. **Dual Reciprocity Boundary Element Method**. Springer, Dordrecht, 2012.

REDDY, J.N.; GARTLING, D.K. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics**. CRC Press, Texas, 2010.

SANTOS, Á. DE J. DOS; LOEFFLER, C.F.; LARA, L. DE O.C. **A stability analysis of the direct interpolation boundary element method applied to acoustic wave propagation problems using the modal superposition technique**. Latin American Journal of Solids and Structures, 21, 520, 2024.

SANTOS, G.A.R.; LOEFFLER, C.F.; BULCAO, A.; LARA, L. DE O.C. **The direct interpolation boundary element method for solving acoustic wave problems in the time domain**. Computational and Applied Mathematics, 44(2): 68, 2025.

TIKHONOV, A.N.; ARSENIN, V.I.A. **Solutions of Ill-posed Problems**. Halsted Press Book, Winston, Michigan, 1977.

## **8. AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido por meio de bolsa de estudos. Ao LabTecMec-UFES por patrocinar o evento.

## **9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES**

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.