

ANÁLISE DE CURVATURA APLICADA AO PROCESSO DE SOLDAGEM A PONTO: AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DO DIÂMETRO E DA PROFUNDIDADE DA SOLDA

Bianca Lapa Ribeiro – d2025100547@unifei.edu.br
Nivaldo Gonçalves de Faria – d2024101989@unifei.edu.br
Leonardo Elias Pereira – leonardoelias.estudante@unifei.edu.br
Anderson Paulo de Paiva – andersonppaiva@unifei.edu.br

Palavras-chave: Soldagem a ponto, Análise de curvatura, Metodologia de Superfície de Resposta, Convexidade, CCD.

1. INTRODUÇÃO

A soldagem por resistência a ponto é amplamente empregada na indústria automotiva e metalmeccânica pela sua eficiência e reprodutibilidade na união de chapas metálicas (Miller, 2012). Seu desempenho depende fortemente de parâmetros operacionais como corrente de solda, pressão do eletrodo, tempo de soldagem e pós-pressão (Paiva, 2006). Pequenas variações nesses parâmetros afetam significativamente a qualidade da junta, expressa pelo diâmetro do ponto e profundidade da indentação (Silva et al., 2020).

Para otimizar esses efeitos, a Metodologia de Superfície de Resposta (RSM), associada ao Delineamento Composto Central (CCD), é amplamente utilizada (Box e Draper, 1987; Montgomery, 2013; Myers et al., 2016). Contudo, a análise de curvatura e convexidade das superfícies é frequentemente negligenciada, embora essencial para garantir estabilidade matemática e validade física (Boyd e Vandenberghe, 2004; Amorim et al., 2021).

Este trabalho aplica a análise de curvatura a modelos de soldagem a ponto, avaliando a influência das variáveis de processo sobre o diâmetro e a profundidade da solda e identificando a natureza geométrica das superfícies resultantes.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 Referencial teórico

2.1.1 Metodologia de Superfície de Resposta (RSM) e Modelagem Polinomial

A RSM é um conjunto de técnicas estatísticas e matemáticas para desenvolver e otimizar processos (Montgomery, 2013; Myers et al., 2016). Baseia-se em modelos polinomiais que descrevem a variável de resposta $f(x)$ em função de fatores independentes x_i . Para sistemas com curvatura relevante, utiliza-se o Delineamento Composto Central (CCD), permitindo ajustar modelos de segunda ordem, que capturam efeitos lineares, quadráticos e de interação.

A forma geral do modelo polinomial é:

$$f(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (1)$$

onde:

- $f(x)$ é a variável de resposta (ex: Identação, Diâmetro).
- x_i são as variáveis codificadas de entrada (fatores).
- β_0 é o coeficiente do ponto central.
- β_i são os coeficientes de efeito linear.
- β_{ij} são os coeficientes dos termos de interação de dois fatores.
- β_{ii} são os coeficientes dos termos quadráticos (curvatura pura).
- ε é o erro aleatório.

A qualidade do modelo e a significância dos coeficientes são verificadas por meio da Análise de Variância (ANOVA) e pelos coeficientes de determinação (R^2 , R^2_{aj} e R^2_{pred}). O teste de Curvatura é um componente crucial na ANOVA, verificando a adequação do modelo de segunda ordem (Valor-P < 0,05).

2.1.2 Análise de Curvatura e Classificação da Superfície

A análise de curvatura, segundo Box e Draper (1987), identifica o ponto estacionário (derivadas parciais nulas) e a natureza geométrica da superfície via autovalores da Matriz Hessiana (H):

$$H=2B \quad (2)$$

A matriz B dos coeficientes é definida por:



$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \frac{\beta_{12}}{2} & \frac{\beta_{13}}{2} & \dots & \frac{\beta_{1k}}{2} \\ \frac{\beta_{12}}{2} & \beta_{22} & \frac{\beta_{23}}{2} & \dots & \frac{\beta_{2k}}{2} \\ \frac{\beta_{13}}{2} & \frac{\beta_{23}}{2} & \beta_{33} & \dots & \frac{\beta_{3k}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_{1k}}{2} & \frac{\beta_{2k}}{2} & \frac{\beta_{3k}}{2} & \dots & \beta_{kk} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A classificação da superfície de resposta é dada pelo sinal dos autovalores (λ) de H:

- Superfície Convexa (Mínimo Local): Todos os autovalores são positivos ($\lambda_i > 0$).
- Superfície Côncava (Máximo Local): Todos os autovalores são negativos ($\lambda_i < 0$).
- Superfície Sela (Indefinida): Autovalores apresentam sinais mistos (positivos e negativos).

Conforme Boyd e Vandenberghe (2004), a presença de curvatura do tipo sela (indefinida) implica que o modelo não possui um único ponto ótimo interno e requer a imposição de restrições para garantir a validade física e estabilidade matemática dos resultados.

2.1.3 Otimização e Restrições Geométricas

Funções indefinidas ou convexas sem restrições tendem a gerar soluções divergentes (Amorim et al., 2021). A introdução de restrições geométricas evita extrapolações fora da região experimental e garante estabilidade numérica. Kumar et al. (2024) demonstram que a curvatura em processos térmicos, como a soldagem a ponto, influencia diretamente o desempenho de modelos otimizados. Assim, a análise de curvatura reforça a robustez da RSM.

2.2 Metodologia

A análise de curvatura foi analisada com auxílio dos softwares Minitab 19 e Excel®.

2.2.1 Planejamento experimental

O experimento foi conduzido com 23 chapas de aço carbono, cada uma contendo 6 pontos de solda, totalizando 138 medições válidas. As variáveis de entrada (fatores controláveis) foram:

- P_e : pressão do eletrodo (kN)
- I_s : corrente de solda (kA)
- T_s : tempo de soldagem (ms)
- P_p : pós-pressão (kN)

As variáveis de resposta foram:

- Diâmetro médio (E e F) — medido na parte externa e interna da solda, respectivamente;
- Indentação (I_d) — profundidade da marca do eletrodo sobre a chapa.

O planejamento foi estruturado segundo um Delineamento Composto Central (CCD), com ponto central replicado, totalizando 125 combinações experimentais.

2.2.2 Ajuste do modelo e análise estatística

Os modelos foram ajustados por regressão múltipla com eliminação *backward* (nível de significância $\alpha = 0,10$). A adequação dos modelos foi verificada pela Análise de Variância (ANOVA) e pelos coeficientes de determinação R^2 , R^2_{aj} e R^2_{pred} .

Os modelos apresentaram valores de R^2_{aj} entre 70,9% e 85,4%, indicando bom ajuste dos dados.

2.2.3 Análise de curvatura

A curvatura foi avaliada por meio da matriz Hessiana ($H=2B$), onde B representa a matriz dos coeficientes quadráticos.

A presença de curvatura significativa foi confirmada pelos testes F (valor- $P < 0,05$) obtidos na ANOVA.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Análise do diâmetro médio – parte externa (E) (baseado em diâmetro_E2)

O modelo para o diâmetro médio externo (Diâmetro_E2) obteve um ajuste $R^2=76,53\%$ e $R^2_{aj}=71,88\%$, com uma ligeira melhoria em relação ao valor de $R^2_{aj}=70,9\%$ mencionado originalmente.

- Variáveis Lineares: As variáveis lineares mais influentes foram o Tempo de Soldagem (T) ($P=0,000$, Coef. $=0,2154$) e a Pós-pressão (Pp) ($P=0,000$, Coef. $=0,1131$), seguidas pela Corrente de Solda (Is) ($P=0,000$, Coef. $=0,1809$). O termo Pp apresentou o maior Coeficiente Codificado em módulo (0,3394 - negativo na Equação Corrigida), indicando ser o fator de maior impacto na resposta.
- Interações: O modelo revelou interações de dois e três fatores significativas, como $P \times Pp$ ($P=0,007$), $T \times Pp$ ($P=0,044$) e a interação de três fatores $P \times T \times Pp$ ($P=0,019$).
- Curvatura: A curvatura foi altamente significativa ($F=19,78$; $P=0,000$). O Coeficiente de Curvatura (Pt Ct) foi positivo (0,1792), mas a presença de efeitos significativos com sinais mistos, como o Coeficiente Pp negativo e o T positivo, confirma que a superfície é do tipo sela (indefinida), reforçando a necessidade de restrições geométricas para a otimização.

Esses resultados são ilustrados pela Figura 1, feita pelo *software* Minitab.

Figura 1: Teste de ANOVA para resposta do diâmetro externo.

Sumário do Modelo

S	R2	R2(aj)	R2(pred)
0,209472	76,53%	71,88%	67,28%

Análise de Variância

Fonte	GL	SQ (Aj.)	QM (Aj.)	Valor F	Valor-P
Modelo	21	15,1691	0,72234	16,46	0,000
Blocos	5	0,1751	0,03501	0,80	0,553
Linear	4	11,4574	2,86435	65,28	0,000
P	1	0,0035	0,00349	0,08	0,779
I	1	0,6811	0,68110	15,52	0,000
T	1	1,2061	1,20609	27,49	0,000
Pp	1	9,8742	9,87420	225,04	0,000
Interações de 2 fatores	6	0,8554	0,14256	3,25	0,006
P*I	1	0,1057	0,10573	2,41	0,124
P*T	1	0,1866	0,18659	4,25	0,042
P*Pp	1	0,3315	0,33150	7,56	0,007
I*T	1	0,0371	0,03714	0,85	0,360
I*Pp	1	0,0069	0,00686	0,16	0,693
T*Pp	1	0,1826	0,18264	4,16	0,044
Interações de 3 fatores	4	1,0110	0,25274	5,76	0,000
P*I*T	1	0,4199	0,41991	9,57	0,003

P*I*Pp	1	0,3633	0,36327	8,28	0,005
P*T*Pp	1	0,2499	0,24990	5,70	0,019
I*T*Pp	1	0,0005	0,00050	0,01	0,915
Interações de 4 fatores	1	0,0369	0,03686	0,84	0,361
P*I*T*Pp	1	0,0369	0,03686	0,84	0,361
Curvatura	1	0,8681	0,86806	19,78	0,000
Erro	106	4,6511	0,04388		
Falta de ajuste	72	2,6064	0,03620	0,60	0,964
Erro Puro	34	2,0447	0,06014		
Total	127	19,8202			

Fonte: os autores.

3.2 Análise do diâmetro médio – parte interna (F) (baseado em diâmetro_média_F)

O modelo para o diâmetro médio interno (Diâmetro_média_F) apresentou o segundo melhor ajuste, com $R^2=83,01\%$ e $R^2_{aj}=79,64\%$. A curvatura global foi extremamente significativa ($F=119,84$; $P=0,000$).

- Variáveis Lineares: As três variáveis de processo, T ($P=0,000$; Coef. $=0,2112$), Pp ($P=0,000$; Coef. $=0,1518$) e Is ($P=0,000$; Coef. $=0,1367$), foram altamente significativas, sendo T a de maior efeito.
- Interações: Foram identificadas interações de dois e três fatores significativas: $P \times Pp$ ($P=0,001$), $I \times T$ ($P=0,008$) e $P \times I \times Pp$ ($P=0,025$).
- Implicações: A forte significância do termo de Curvatura ($F=119,84$) corrobora o comportamento não linear acentuado. A ocorrência de termos significativos com sinais opostos reitera a classificação de curvatura do tipo sela (indefinida).

Esses resultados são ilustrados pela Figura 2, feita pelo *software* Minitab.

Figura 2: Teste de ANOVA para resposta do diâmetro interno.

Sumário do Modelo

S	R2	R2(aj)	R2(pred)
0,150465	83,01%	79,64%	74,52%

Análise de Variância

Fonte	GL	SQ (Aj.)	QM (Aj.)	Valor F	Valor-P
Modelo	21	11,7212	0,55815	24,65	0,000
Blocos	5	0,1176	0,02351	1,04	0,399
Linear	4	7,0994	1,77486	78,40	0,000
P	1	0,0316	0,03162	1,40	0,240
I	1	1,5849	1,58490	70,00	0,000
T	1	3,7702	3,77022	166,53	0,000
Pp	1	1,9743	1,97433	87,21	0,000
Interações de 2 fatores	6	0,5172	0,08621	3,81	0,002
P*I	1	0,0273	0,02732	1,21	0,274
P*T	1	0,0002	0,00015	0,01	0,934
P*Pp	1	0,2595	0,25952	11,46	0,001
I*T	1	0,1676	0,16760	7,40	0,008
I*Pp	1	0,0025	0,00253	0,11	0,739
T*Pp	1	0,0583	0,05830	2,58	0,112
Interações de 3 fatores	4	0,1651	0,04127	1,82	0,130
P*I*T	1	0,0011	0,00107	0,05	0,828

P*I*Pp	1	0,1172	0,11725	5,18	0,025
P*T*Pp	1	0,0566	0,05657	2,50	0,117
I*T*Pp	1	0,0026	0,00257	0,11	0,737
Interações de 4 fatores	1	0,0439	0,04392	1,94	0,167
P*I*T*Pp	1	0,0439	0,04392	1,94	0,167
Curvatura	1	2,7132	2,71323	119,84	0,000
Erro	106	2,3998	0,02264		
Falta de ajuste	72	1,8527	0,02573	1,60	0,066
Erro Puro	34	0,5471	0,01609		
Total	127	14,1210			

Fonte: dos autores.

3.3 Análise da profundidade (indentação) (baseado em indentação corrigida)

O modelo de indentação (Indentação Corrigida) demonstrou o melhor desempenho estatístico com $R^2=87,35\%$ e $R^2_{aj}=84,84\%$. A curvatura foi significativa ($F=18,30$; $P=0,000$).

- Variáveis Lineares: A Corrente de Solda (Is) ($P=0,000$; Coef. $=0,02887$) e o Tempo de Soldagem (T) ($P=0,000$; Coef. $=0,02975$) foram os fatores lineares mais influentes. O Coeficiente de Efeito Codificado do T foi o maior (0,02975), seguido de Is (0,02887), indicando que pequenas variações nesses fatores levam às maiores alterações na profundidade.
- Interações: As interações de dois fatores $P \times T$ ($P=0,000$) e $I \times T$ ($P=0,000$) foram altamente significativas. O modelo também apresentou a interação de três fatores $I \times T \times P$ significativa ($P=0,011$).
- Curvatura: O Coeficiente de Curvatura ($P_t C_t$) foi negativo ($-0,01253$) e altamente significativo ($P=0,000$), confirmando a tendência à concavidade local, onde o aumento desses fatores leva a um máximo de indentação antes de estabilizar ou reduzir.

Esses resultados são ilustrados pela Figura 3, feita pelo *software* Minitab.

Figura 3: Teste de ANOVA para resposta da identificação.

Sumário do Modelo

S	R2	R2(aj)	R2(pred)
0,0152266	87,35%	84,84%	81,90%

Análise de Variância

Fonte	GL	SQ (Aj.)	QM (Aj.)	Valor F	Valor-P
Modelo	21	0,169698	0,008081	34,85	0,000
Blocos	5	0,003878	0,000776	3,35	0,008
Linear	4	0,141917	0,035479	153,03	0,000
P	1	0,007254	0,007254	31,29	0,000
I	1	0,070735	0,070735	305,09	0,000
T	1	0,074808	0,074808	322,66	0,000
Pp	1	0,000000	0,000000	0,00	0,987
Interações de 2 fatores	6	0,036865	0,006144	26,50	0,000
P*I	1	0,000030	0,000030	0,13	0,721
P*T	1	0,005197	0,005197	22,42	0,000
P*Pp	1	0,000364	0,000364	1,57	0,213
I*T	1	0,030915	0,030915	133,34	0,000
I*Pp	1	0,000310	0,000310	1,34	0,250
T*Pp	1	0,000041	0,000041	0,18	0,674
Interações de 3 fatores	4	0,002030	0,000507	2,19	0,075
P*I*T	1	0,000021	0,000021	0,09	0,764

P*I*Pp	1	0,000177	0,000177	0,76	0,384
P*T*Pp	1	0,000308	0,000308	1,33	0,252
I*T*Pp	1	0,001537	0,001537	6,63	0,011
Interações de 4 fatores	1	0,000379	0,000379	1,63	0,204
P*I*T*Pp	1	0,000379	0,000379	1,63	0,204
Curvatura	1	0,004242	0,004242	18,30	0,000
Erro	106	0,024576	0,000232		
Falta de ajuste	72	0,014227	0,000198	0,65	0,937
Erro Puro	34	0,010349	0,000304		
Total	127	0,194274			

Fonte: dos autores.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação da análise de curvatura aos modelos obtidos no experimento de soldagem a ponto permitiu identificar a natureza geométrica das superfícies de resposta e compreender o comportamento não linear entre os fatores de processo e as variáveis de qualidade da solda.

A análise de curvatura permitiu identificar a natureza geométrica das superfícies e compreender o comportamento não linear entre fatores e variáveis de qualidade da solda. Os modelos apresentaram bom ajuste estatístico (R^2_{aj} entre 71,88% e 84,84%), sendo o de Indentação Corrigida o melhor.

A curvatura foi significativa em todas as respostas ($P < 0,001$), com predominância do tipo sela, confirmando comportamento indefinido. A Pós-pressão (P_p) teve forte impacto na redução do diâmetro externo, enquanto T e Is influenciaram fortemente todas as respostas. A otimização requer restrições geométricas para evitar divergências. O equilíbrio ideal entre diâmetro e profundidade ocorre em níveis intermediários de Is e T , exigindo ajuste balanceado entre esses fatores.

Conclui-se que a análise de curvatura é ferramenta indispensável na interpretação de modelos obtidos via RSM e CCD, garantindo confiabilidade das soluções.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos à CAPES, CNPq e FAPEMIG pelo suporte, e ao NOMATI-UNIFEI pelo apoio técnico e materiais disponibilizados.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Anderson Rici et al. Metaheurísticas para alinhamento de múltiplas sequências: Uma revisão sistemática. **Computational biology and chemistry**, v. 94, p. 107563, 2021.

BOX, G. E. P.; DRAPER, N. R. **Empirical Model-Building and Response Surfaces**. New York: Wiley, 1987.

BOYD, S. P.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge university press, 2004.

KUMAR, G.; GOLE, S.; MURTHY, D.S.; GAURAV. **Analysis of thermal performance characteristics of rotating packed beds using response surface methodology**. Applied Thermal Engineering, v. 254, 2024.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 8. ed. New York: John Wiley & Sons, 2013.

MYERS, R. H.; MONTGOMERY, D. C.; ANDERSON-COOK, Christine M. **Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments**. 4. ed. Hoboken: Wiley, 2016.

PAIVA, A. P. **Metodologia de superfície de resposta e análise de componentes principais em otimização de processos de manufatura com múltiplas respostas correlacionadas**. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UNIFEI, Itajubá, 257 pgs. 2006.

PAIVA, A. P. **Metodologia de superfície de resposta e análise de componentes principais em otimização de processos de manufatura com múltiplas respostas correlacionadas**. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UNIFEI, Itajubá, 257 pgs. 2006.

SEVERINO, G. **Otimização do torneamento vertical de anéis de pistão de ferro fundido cinzento martensítico utilizando ferramenta de metal duro com geometria especial**. Dissertação de Mestrado - Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, UNIFEI, Itajubá, 128 pgs. 2011.

SINGH, D.; RAO, P. V. A surface roughness prediction model for hard turning process.

International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 32, n. 11-12, p.

1115-1124, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00170-006-0429-2>. Acesso em:

13 maio. 2025.