



## Método extragradiente subgradiente com a técnica da proporção áurea para resolver problemas de equilíbrio em espaços de Hilbert

Lauriano S. Souza<sup>1,3\*</sup> (PG), Roberto C. M. Silva<sup>1</sup> (PQ), Flávia M. O. Jacinto<sup>1</sup> (PQ), Pedro J. S. Santos<sup>2</sup> (PQ)

<sup>1</sup>Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 3000, Coroado I, 69077-000, Manaus – AM, Brasil.

<sup>2</sup>Universidade Federal do Delta do Parnaíba, Coordenação do Curso de Matemática, Av. São Sebastião, 2819, Reis Velloso, 64202-020, Parnaíba – PI, Brasil.

<sup>3</sup>Universidade do Estado do Amazonas, Ciclo Básico de Engenharia, Escola Superior de Tecnologia, Av. Darcy Vargas, 1200, Parque Dez de Novembro, 69050-020, Manaus – AM, Brasil.

\*ldssouza@ufam.edu.br

**Palavras-Chave:** Problemas de equilíbrio, pseudomonotonicidade, condição tipo-Lipschitz, método extragradiente subgradiente, passo inercial, proporção áurea.

### Introdução

O Problema de Equilíbrio (PE) é uma formulação unificadora que abrange, como casos particulares, problemas de desigualdade variacional, otimização, complementariedade, ponto fixo, equilíbrio de Nash, dentre outros<sup>2</sup>. Em espaços de Hilbert, esquemas extragradiente clássicos costumam exigir duas projeções por iteração (em um conjunto convexo e fechado  $C$ ) e/ou conhecimento prévio de constantes do tipo-Lipschitz, o que restringe a aplicabilidade<sup>5,7</sup>. Para reduzir custo, variantes extragradiente subgradiente substituem a segunda projeção (ou minimização) em  $C$  por uma projeção (ou minimização) em um *semiespaço de apoio*  $T_n$  definido via subgradiente e que contém  $C$ ; essa troca é uma relaxação segura e computacionalmente barata<sup>3</sup>. Além disso, *regras de passo autoadaptativas* evitam buscas lineares e tornam a escolha de  $\lambda_n$  explícita<sup>4</sup>, enquanto a *proporção áurea*  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é empregada aqui para *ampliar o intervalo admissível do parâmetro*  $\mu$  (para além do caso clássico  $(0, 1)$ ), trazendo estabilidade adicional e ganhos computacionais<sup>6</sup>. Em paralelo, ingredientes inerciais e a técnica de *viscosidade* contribuem para acelerar e garantir convergência forte<sup>1,8</sup>. Nesse contexto, propomos e analisamos um algoritmo extragradiente subgradiente acelerado, fortemente convergente, para PE pseudomonótono sob condição do tipo-Lipschitz, com passo autoadaptativo baseado na proporção áurea, conciliando robustez teórica e eficiência prática.

### Formulação do Problema e Algoritmo Proposto

**Formulação.** Seja  $H$  um espaço de Hilbert real,  $C \subset H$  convexo, fechado e não vazio, e  $f : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x, x) = 0$ . O PE consiste em encontrar  $x^* \in C$  tal que  $f(x^*, y) \geq 0$  para todo  $y \in C$ . Assumimos a **Condição A:**  $f$  é pseudomonótona em  $C$ , satisfaz condição do tipo-Lipschitz em  $H$ ,  $f(x, \cdot)$  é convexa e semicontínua inferior em  $H$ , para todo  $x \in H$ , e  $f(\cdot, y)$  é fracamente

semicontínua superior em  $C$ , para todo  $y \in C$ .

Também consideramos uma **Condição B:** Escolha uma sequência inercial  $\{u_n\} \subset [0, 1)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\alpha_n} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$ , onde  $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$  satisfaz  $\alpha_n \rightarrow 0$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$ .

#### Algoritmo 1

**Passo 0:** Considere  $u_1 \in [0, 1)$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\theta = \varphi - 1$ ,  $\mu \in (0, \frac{2}{\varphi})$ . Escolha  $x_0, x_1 \in H$  e defina  $n = 1$ .

**Passo 1:** Dados  $x_{n-1}, x_n \in H$ ,  $u_n \in [0, 1)$  e  $\lambda_n > 0$ , calcule  $w_n = x_n + u_n(x_n - x_{n-1})$  e resolva

$$y_n = \arg \min_{y \in C} \left\{ \lambda_n f(w_n, y) + \frac{1}{2} \|w_n - y\|^2 \right\}.$$

Se  $y_n = w_n$ , *pare*:  $y_n$  resolve o PE. Se não, siga.

**Passo 2:** Escolha  $v_n \in \partial_2 f(w_n, y_n)$  e  $q_n \in N_C(y_n)$  tais que  $q_n = w_n - \lambda_n v_n - y_n$ , e defina o semiespaço  $T_n = \{x \in H : \langle w_n - \lambda_n v_n - y_n, x - y_n \rangle \leq 0\}$ . Etapa “barata” em  $T_n$ : calcule

$$z_n = \arg \min_{y \in T_n} \left\{ \lambda_n f(y_n, y) + \frac{1}{2} \|w_n - y\|^2 \right\}.$$

**Passo 3:** Ponto auxiliar  $e_n = (1-\theta)w_n + \theta x_n$ , atualização por viscosidade, onde  $g$  é uma  $\rho$ -contração,

$$x_{n+1} = \alpha_n g(e_n) + (1 - \alpha_n) z_n.$$

#### Atualização do passo (autoadaptativo):

$$d_n := f(w_n, z_n) - f(w_n, y_n) - f(y_n, z_n),$$

$$N_n := \|w_n - y_n\|^2 + (1 + \varphi) \|z_n - y_n\|^2,$$

$$\lambda_{n+1} := \begin{cases} \min\{\lambda_n, \mu N_n / (4\varphi d_n)\}, & d_n > 0, \\ \lambda_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina  $n := n + 1$  e retorne ao **Passo 1**.

## Resultados e Discussão

Apresentamos a seguir o enunciado central que fundamenta o método e um panorama dos demais achados.

**Teorema (convergência forte).** Sob as **Condições A e B** e supondo o conjunto solução  $S_{PE}(f, C) \neq \emptyset$ , a sequência  $\{x_n\}$  do **Algoritmo 1** converge fortemente para  $x^* \in S_{PE}(f, C)$ , com  $x^* = P_{S_{PE}(f, C)}(g(x^*))$ . Sob forte pseudomonotonicidade da bifunção, a convergência é  $R$ -linear. Esse resultado garante a robustez do algoritmo sem exigir o conhecimento prévio das constantes do tipo-Lipschitz na implementação, graças à atualização autoadaptativa do passo.

**Algoritmo 2.** Propusemos uma variante com um segundo passo inercial  $\bar{w}_n = (1 - \alpha_n)[x_n + s_n(x_n - x_{n-1})]$ , mantendo a mesma regra de passo autoadaptativa e viscosidade.

**Experimentos numéricos.** Avaliamos os **Algoritmos 1 e 2** em instâncias tipo Nash–Cournot, medindo: (i) *acurácia*  $A(x) = \|x - \arg \min_{y \in C} \{f(x, y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\}\|^2$ ; (ii) *erro relativo*  $E_n = \|x_{n+1} - x_n\| / \max\{1, \|x_n\|\}$ ; (iii) *número de iterações* até o critério  $\|y_n - w_n\| \leq \varepsilon$ ; e (iv) *tempo de CPU* (s). Observamos *decaimento estável* de  $A(x_n)$  e  $E_n$  e que o **Algoritmo 2** (duplo passo inercial) requer *menos iterações* e *menor tempo de CPU*, preservando a precisão. A regra de passo via *proporção áurea* manteve desempenho estável para  $\mu \in (0, 2/\varphi)$ , inclusive  $\mu \geq 1$ , confirmando o ganho teórico (intervalo ampliado) e computacional (robustez sem busca linear).

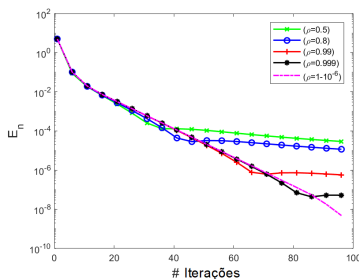


Figura 1:  $E_n$  por iteração para diferentes valores de  $\rho$  (caso  $m = 100$ ).

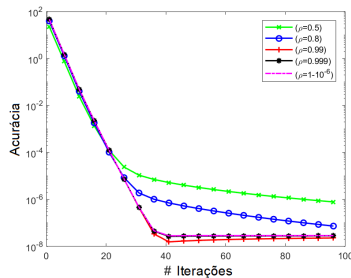


Figura 2: Acurácia  $A(x_n)$  por iteração para diferentes valores de  $\rho$  (caso  $m = 100$ ).

A Figura 3 sintetiza as quatro métricas normalizadas em  $[0, 1]$ . Observa-se que o **Algoritmo 2-D** domina o **Algoritmo 1** em *iterações* e *CPU*, mantendo *erro relativo* e *acurácia* semelhantes.

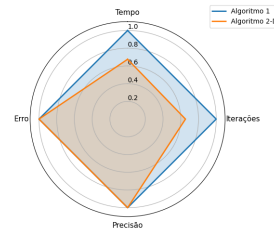


Figura 3: Gráfico radar. Valores menores (mais próximos do centro) indicam melhor desempenho.

## Conclusões

Propusemos um esquema extragradiente subgradiente com *passo autoadaptativo* e uso da *proporção áurea*, incorporando termos inerciais e a técnica de *viscosidade*. O método é explicitamente implementável, dispensa o conhecimento prático das constantes do tipo-Lipschitz, garante *convergência forte* e, sob *forte pseudomonotonicidade*, atinge *taxa R-linear*. A análise via proporção áurea amplia o intervalo admissível de  $\mu$ , o que se reflete em maior robustez. Os experimentos em instâncias tipo Nash–Cournot confirmam *decaimento estável* das métricas de acurácia e erro relativo e mostram que a variante com *duplo passo inercial* reduz *iterações* e *tempo de CPU* sem perda de precisão.

## Agradecimentos

Agradecemos ao PDM - UFPA/UFAM e aos coautores pelas discussões que fortaleceram este estudo.

## Referências

- [1] Alvarez, F. Weak convergence of a relaxed and inertial hybrid projection-proximal point algorithm for maximal monotone operators in hilbert space. *SIAM Journal on Optimization*, 14(3):773–782. 2004.
- [2] Blum, E.; Oettli, W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. student*, 63:123–145. 1994.
- [3] Censor, Y.; Gibali, A.; Reich, S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 148(2):318–335. 2011.
- [4] Hieu, D.; Strodiot, J.; Muu, L. Modified golden ratio algorithms for solving equilibrium problems (2019). 1907.
- [5] Korpelevich, G. M. The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Matecon*, 12:747–756. 1976.
- [6] Long, X. J.; Yang, J.; Cho, Y. J. Modified subgradient extragradient algorithms with a new line-search rule for variational inequalities. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 46(4):140. 2023.
- [7] Quoc Tran, D.; Le Dung, M.; Nguyen, V. H. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*, 57(6):749–776. 2008.
- [8] Xu, H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 298(1):279–291. 2004.