"Planeta Água: a cultura oceânica para enfrentar as mudanças climáticas no meu território"

SECT - ICE

XII SECT ICE Semana de Ciência e Tecnologia

20 a 23 de Outubro de 2025

Realização:

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATA

Do Hotel de Hilbert aos infinitos de Cantor: uma jornada pelo infinito matemático

Felipe André Silva de Souza[1]*, Raíssa Gabrielly Cavalcante de Souza[1], Aline de Oliveira Batista[1], William José dos Reis Alves[1].

[1]Colégio Brasileiro Pedro Silvestre. Rua 10 de Julho, 843 - Centro, Manaus - AM, 69010-060.

* *felipeandresouza1@gmail.com*

Palavras-Chave: infinitos, cardinalidade, bijeções, números, diagonalização

Introdução

A noção de infinito representa um dos desafios mais profundos à intuição, sendo também um pilar fundamental da matemática moderna. Duas de suas ilustrações mais notáveis são o paradoxo do Hotel de Hilbert, que explora um infinito contável, e a descoberta de que existem, de fato, diferentes "tamanhos" de infinito. Foi George Cantor quem primeiro investigou formalmente essa hierarquia, utilizando para isso seu célebre argumento de Diagonalização. Este trabalho, realizado por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, tem como objetivo explorar o conceito de infinito matemático através da formalização do Hotel de Hilbert, tal como apresentado em [1, 2], e do argumento de diagonalização de Cantor, abordado em Halmos [3].

Material e Métodos

A partir de Dantas e Santana [2], foram estudadas as preliminares acerca de funções bijetivas, enumerabilidade e conjuntos infinitos. O problema do Hotel de Hilbert foi proposto como instrumento alegórico para apresentar um infinito contável. Nele, o gerente recebe a tarefa de alocar mais um hóspede no hotel que possui infinitos quartos já ocupados. A partir daí formalizou-se o problema, considerando uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ com $\mathbb{N}_1 = \{2, 3, 4, \dots\}$ definida por $f(n) = n + 1$ provando-a bijetiva, logo pôde-se verificar que a cardinalidade entre o domínio e o contradomínio de f é a mesma. Outro problema clássico envolvendo o Hotel de Hilbert foi estudado: Um ônibus com infinitos lugares, todos ocupados, chega ao Hotel. De que forma o gerente alocaria esses novos hóspedes? Para resolver esse problema, basta fazer a seguinte associação:

$1 \Rightarrow 2$
$2 \Rightarrow 4$
$4 \Rightarrow 8$
$\vdots$
$n \Rightarrow 2n.$

Ou seja, a solução é realocar o hóspede do quarto n para o quarto $2n$. Isso libera todos os quartos ímpares para os novos hóspedes. Matematicamente, isso correspode a definir a função $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$, onde $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ é o conjunto dos pares positivos. Como f é uma bijeção, ela estabelece que o conjunto de todos os hóspedes originais, representado por $\mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade do conjunto dos hóspedes realocados, $2\mathbb{N}$, comprovando que o hotel infinito pode acomodar uma quantidade infinita de novos ocupantes sem despejar ninguém. Sobre a existência de infinitos maiores que outros, foi estudado o argumento da diagonalização de Cantor, a partir de Halmos [3]. O argumento se baseia no fato de que não é possível listar todos os números entre 0 e 1. Mais rigorosamente, não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to (0, 1)$. Para verificar esse fato, usa-se a técnica de prova por contradição: Se existir tal bijeção, o intervalo $(0, 1)$ é contável. Listando alguns elementos do intervalo e usando a diagonalização, pode-se construir um número $s \in (0, 1)$ que não é imagem de nenhum $x \in \mathbb{N}$, portanto, fica de fora da lista, que prova que a cardinalidade do intervalo difere da cardinalidade dos naturais. De modo mais ilustrativo, supondo que seja possível listar todos os números do intervalo $(0, 1)$, temos:

$1 \Rightarrow r_1 = 0, \mathbf{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$
$2 \Rightarrow r_2 = 0, a_{21} \mathbf{a_{22}} a_{23} a_{24} \dots$
$3 \Rightarrow r_3 = 0, a_{31} a_{32} \mathbf{a_{33}} a_{34} \dots$
$4 \Rightarrow r_4 = 0, a_{41} a_{42} a_{43} \mathbf{a_{44}} \dots$
$\vdots$

Construindo um $s = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ de modo que cada $b_i \neq a_{ii}$. Tal número s não pode estar na lista, pois supondo que esteja, seria da ordem de algum $k \in \mathbb{N}$, logo $s = r_k$. Porém, nota-se que s difere de cada r_i por pelo menos um dígito, a_{ii}, portanto s não pode ser nenhum r_k, logo não é possível associar todo $y \in (0, 1)$ a um número natural, e tal bijeção f não existe.

Conclusões

Os estudos de Cantor revolucionaram a Matemática ao demonstrar, de forma rigorosa, a existência de diferentes tamanhos de infinito. O Argumento da Diagonal provou que os números reais não são contáveis, estabelecendo que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é estritamente maior que a de $\mathbb{N}$. Esses fatos ajudam a compor o que ficou conhecido como Teorema de Cantor, que afirma que a cardinalidade de um conjunto A é menor que a cardinalidade do conjunto $P(A)$, de suas partes (também chamado de conjunto potência). Tais resultados abrem portas para o estudo do que Cantor chamou de números transfinitos, que são cardinais que expressam quantidades infinitas, sendo o mais famoso, o número $\aleph_0$ (alef zero), que expressa a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$.

Já o Hotel de Hilbert oferece uma visão acessível e fascinante do infinito enumerável, ilustrando como um conjunto infinito pode manter sua cardinalidade mesmo ao ser "dividido"ou "expandido".

Em síntese, este trabalho evidencia que, ao lidar com o infinito, nossa intuição frequentemente falha, e só a ferramenta da lógica matemática permite explorar e compreender esses fenômenos que continuam a desafiar e encantar nossa percepção do universo.

Agradecimentos

A FAPEAM pelo suporte financeiro, ao Colégio Brasileiro Pedro Silvestre pelo apoio e ao ICE e Departamento de Matemática pelo espaço e oportunidade.

Referências

[1] Dantas, I. A, Santana, F. L. *Falando sobre o infinito no ensino médio*. Professor de Matemática Online (PMO) vol. 11, Sociedade Brasileira de Matemática. 2022.

[2] Giraldo, V. *Ideias de infinito*. Revista Ciência Hoje, UFRJ 2018.

[3] Halmos, P, R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos* Ed. 1. Editora Ciência Moderna. 2021.