



O estudo de seqüências numéricas e o método das aproximações sucessivas

Guilherme Cavalcante Gomes^{1*}, Flávia Morgana de Oliveira Jacinto²

¹Universidade Federal do Amazonas, PET Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

²Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

*guicgomes2003@gmail.com

Palavras-Chave: Convergência, aproximações sucessivas, seqüências de Cauchy.

Introdução

O estudo de seqüências é um assunto fundamental nos cursos de Análise I, sendo essencial para compreensão de conceitos como limite e continuidade de funções. Para estudantes de licenciatura ou bacharelado em Matemática, dominar esse conteúdo é de grande importância, pois se trata da base teórica necessária para o estudo de tópicos mais avançados em Análise Real, como diferenciabilidade e integração. A presente pesquisa busca realizar um estudo do método das aproximações sucessivas, uma técnica utilizada para encontrar soluções aproximadas para equações através de uma seqüência de iterações.

Objetivo

Realizar o estudo de seqüências numéricas e o método das aproximações sucessivas e suas aplicações.

Métodos

O desenvolvimento deste trabalho baseia-se em uma abordagem de pesquisa teórica em diversos livros que foram disponibilizados para estudo, além de trabalhos de outros pesquisadores voltados para o conteúdo de análise real, tudo isso com a intenção de elaborar um conteúdo sobre seqüências numéricas e formular aplicações do Método das Aproximações Sucessivas. O trabalho se dividiu em três etapas: pesquisa bibliográfica, a escolha do conteúdo a ser apresentado e a redação e construção dos tópicos.

Resultados e Discussão

Uma seqüência numérica (x_n) é Cauchy, se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$n > n_0 \implies |x_n - x_{n+p}| < \epsilon$$

Segundo Lima [2], se uma seqüência de números reais (x_n) é Cauchy então ela é convergente. Esse tipo de seqüência surgiu quando os matemáticos no século XVIII tentavam processos numéricos para resolver equações.

Segundo Ângelo [1], a equação $x^3 - 9x + 2 = 0$, pode ser escrita na forma equivalente $x = \frac{x^3 + 2}{9}$ ou, ainda, $x = f(x)$, onde $f(x) = \frac{x^3 + 2}{9}$. Dessa forma, pode-se construir uma seqüência numérica infinita, tomando-se inicialmente um certo valor x_1 , e em seguida calculando-se:

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

Dessa forma, o objetivo é demonstrar que a seqüência é de Cauchy, pois, neste caso, ela será convergente para um ponto x_0 que constitui a solução da equação dada. Com isso uma aplicação seria o seguinte método:

(Método das Aproximações Sucessivas) Seja dado $0 \leq \lambda < 1$. Suponhamos que a seqüência (x_n) satisfaça a seguinte condição:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq |x_{n+1} - x_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Afirmamos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy, e portanto, converge. Com efeito para $n = 1$ temos:

$$|x_3 - x_2| \leq \lambda |x_2 - x_1|$$

De maneira geral, temos:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^{n-1} |x_2 - x_1|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Deste modo, para $n, p \in \mathbb{N}$ arbitrários, vale

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\lambda^{n+p-2} + \lambda^{n+p-3} + \dots + \lambda^{n-1}) |x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{n-1} (\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \dots + \lambda + 1) |x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{n-1} (\lambda^{p-1} + \lambda^{p-2} + \dots + \lambda + 1) |x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{n-1} \cdot \frac{1 - \lambda^p}{1 - \lambda} |x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda} |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

Assim, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} |x_2 - x_1| = 0$$

Dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} |x_2 - x_1| < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Logo $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, ou seja, $|x_m - x_n| < \epsilon$ para quaisquer que sejam $m, n > n_0$. E portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy e concluímos que é convergente.

Aplicação 1 (Aproximações sucessivas da raiz quadrada) Seja um valor $a > 0$ e queremos descobrir a raiz quadrada desse valor a . Vamos definir uma sequência (x_n) e tomar um $x_1 = c > 0$, tal que c é um valor dado arbitrariamente e definindo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (1)$$

Vamos provar que $b = \lim x_n$ e $b \neq 0$, deve ser necessariamente $b = \sqrt{a}$.

Quando fazemos $n \rightarrow \infty$ em (1), obtemos:

$$b = \frac{1}{2} \left(b + \frac{a}{b} \right)$$

$$2b = b + \frac{a}{b}$$

$$b^2 = a$$

Uma resultado que serve para mostrar que a fórmula de recorrência (1) fornece aproximações sucessivas para \sqrt{a} é o seguinte lema:

Lema. Para todo $x > 0$, tem-se $\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) > \sqrt{\frac{a}{2}}$

A demonstração desse lema pode ser encontrada em Lima [2], capítulo 4, página 87.

Aplicação 2 (Aproximações sucessivas da raiz n-ésima). Seja um valor $a > 0$ e queremos descobrir a raiz n-ésima desse valor a . Vamos definir uma sequência (x_n) e tomar um $x_1 = c > 0$, tal que c é um valor dado arbitrariamente e definindo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{N} \left((N-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{N-1}} \right) \quad (2)$$

Aplicação 3 (Aproximações sucessivas para soluções de equações transcendentais) . Por exemplo, para resolver uma equação $\cos(x) = x$ (Ponto fixo) definimos:

$$x_{n+1} = \cos(x_n) \quad (3)$$

Aplicação 4 (Aproximações sucessivas para calcular logaritmos) . Seja um valor $a > 0$ queremos descobrir o valor de $\ln(a)$, então definimos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - a}{e^{x_n}} \quad (4)$$

Conclusões

O estudo realizado permitiu me aprofundar no conteúdo de sequências numéricas, em especial as sequências de Cauchy, como base para buscar aplicações do método das aproximações sucessivas. Verificou-se que esse método constitui uma ferramenta poderosa e acessível para a resolução de equações que não admitem solução algébrica direta, como é o caso de equações transcendentais e o cálculo de raízes n-ésimas. Por meio da análise das aplicações — como o cálculo de raiz quadrada, raiz n-ésima, solução de equações transcendentais e aproximação de logaritmos — foi possível ver a eficácia do método, que combina simplicidade computacional com rigor matemático. A convergência garantida sob certas condições, como o caso a constante $0 \leq \lambda < 1$, assegura a confiabilidade do processo iterativo.

Além disso, este trabalho cumpre uma função de servir como material de apoio a estudantes que estejam em fase inicial com Análise Real.

Agradecimentos

FNDE pelo apoio financeiro.

PET Matemática por ter proporcionado um ambiente de estudos e a oportunidade de elaborar uma pesquisa acadêmica.

Agradeço imensamente a minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Flávia Morgana, pela sua dedicação e orientação indispensável durante a pesquisa acadêmica que me possibilitou desenvolver habilidades científicas e uma melhor compreensão sobre o conteúdo de Análise Real.

Referências

1. ÂNGELO, Papa Neto. GUIMARÃES, Zellaber Gondim. Análise Real: Licenciatura em Matemática - Fortaleza: UAB/IFCE - 2011.
2. LIMA. Elon Lages. Curso de Análise Real - 15. ed. - Rio de Janeiro: IMPA 2022.