"Planeta Água: a cultura oceânica para enfrentar as mudanças climáticas no meu território"
SECT - ICE
XII SECT ICE
Semana de Ciência e Tecnologia
20 a 23 de Outubro de 2025
Realização:
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATA

Uma Breve Introdução à Programação Linear

Karoline Bitencourt Lins [1*], Flávia Morgana de Oliveira Jacinto [2]

[1]Universidade Federal do Amazonas, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.
[2]Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

[*] *karoline.lins@ufam.edu.br*

Palavras-Chave: Programação linear, método do gráfico.

Introdução

A Pesquisa Operacional (PO) utiliza-se de computadores, matemática e estatística[4] para estudar problemas envolvendo negócios, tendo o objetivo de obter a melhor tomada de decisão de determinado problema como: otimização de recursos, logística, produção, investimentos, entre outros. Dentro da PO, a Programação Linear é utilizada para descrever o comportamento de um sistema que tenta simplificar a realidade. A partir disso, procura-se maximizar ou minimizar uma função linear, chamada de função objetivo, que está sujeita a certas restrições lineares, que em geral são formadas por desigualdades ou igualdades e são tratadas como limitações do problema[1]. O objetivo é encontrar um ponto ótimo, onde a função atinge o seu valor máximo ou mínimo, garantindo a melhor solução para o problema. O método gráfico possibilita a visualização geométrica de determinados problemas. Nesse trabalho vamos explorar conceitos vistos tanto no ensino básico quanto na graduação para a construção dessa abordagem introdutória a programação linear.

Material e Métodos

O estudo foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica sobre problemas programação linear, onde as variáveis de decisão pertencem a $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$. O modelo teórico padrão para a resolução dos problemas é o seguinte

$$\begin{aligned} \text{Maximizar (ou Minimizar)} \quad & < c, x >, c \in R^n, x \in R^n \\ \text{Sujeito a} \quad & Ax \geq b, A \in R^{m\times n}, b \in R^m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Lembrando que nesse trabalho n = 2 ou n = 3 e que para trabalhar com quatro ou mais variáveis é preciso um método algébrico, pois a visualização geométrica não é mais possivel. Tendo isso como base, foi escolhido um exemplo por questão de simplicidade e melhor apresentação do método, sendo utilizados os softwares Python e Geogebra para as ilustrações. Apresentamos na proxima sessão o gráfico completo do Problema de Programação linear com a função objetivo no ponto ótimo: $(x_1, x_2) = (30/7, 20/7)$[6]. Dentro dos conceitos matemáticos utilizados destacam-se: 1º (o vetor gradiente por indicar o maior crescimento da função); 2º (as curvas de nível da função objetivo); 3º (interseção entre as desigualdades ou igualdades das restrições do problema)[5], que na programação linear é o conjunto de vértices do politopo conhecido como conjunto de soluções viáveis.

Resultados e Discussão

Para resolver um problema de programação linear (PPL) pelo método do gráfico, definimos eixos que representam as quantidades de x_1 e x_2. Em seguida, determina-se o conjunto de soluções viáveis do problema[3]. Para isso, utiliza-se a representação gráfica de cada restrição, determinando-se o conjunto de soluções viáveis a partir interseção dos semiplanos determinada por essas restrições. A seguir ilustramos o método do gráfico na resolução no seguinte problema de programção linear:

Uma pessoa em dieta necessita ingerir pelo menos 20 unidades de vitamina A, 10 unidades de vitamina B e 2 unidades de vitamina C. Ela deve conseguir essas vitaminas a partir de dois tipos diferentes de alimentos: A_1 *e* A_2*. A quantidade de vitaminas que esses produtos contêm por unidade e o preço unitário de cada um deles estão expressos na tabela abaixo:*

Alimento	Vit. A	Vit. B	Vit. C	Preço (u.m.)
A_1	4	1	1	30
A_2	1	2	0	20

Deseja-se saber a quantidade de unidades de A_1 *e* A_2 *que essa pessoa deve consumir para satisfazer as necessidades vitamínicas a um custo possível.*

Para a formulação do problema, sejam:
x_1 = quantidade de alimentos para A_1;
x_2 = quantidade de alimentos para A_2.

Como um alimento de A_1 custa 30 unidades monetárias x_1 custarão $30x_1$. Da mesma forma, x_2 unidades de A_2 custarão $20x_2$. Logo teremos o custo total dos alimentos representado pela seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$$

Diante disso, se uma unidade de alimento A_1 fornece 4 unidades da vitamina A, x_1 fornecerão $4x_1$ de vitamina A. Da mesma forma, o alimento A_2 fornecerá $1x_2$ de vitamina A. Como ele deve ingerir pelo menos 20 unidades da vitamina, teremos a seguinte inequação:

$$4x_1 + x_2 \geq 20$$

De forma análoga, para vitamina B, $x_1 + 2_2 \geq 10$, e para a vitamina C, $x_1 \geq 2$.
Assim, o problema formulado como um problema de programação linear fica:

$$\begin{array}{llll} & 30x_1 + 20x_2 & & \\ \text{sujeito a:} & 4x_1 + x_2 & \geq 20 & \text{(Vitamina A)} \\ & x_1 + 2x_2 & \geq 10 & \text{(Vitamina B)} \\ & x_1 & \geq 2 & \text{(Vitamina C)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

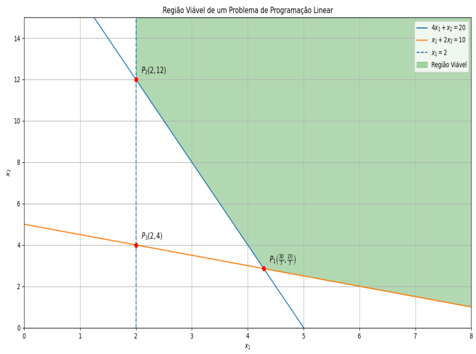

Figura 1: Representação gráfica do conjunto de soluções viáveis do problema. Fonte: Gráfico de autoria própria

Na Fig. 1 é possivel lembrar da representação de uma reta em $\mathbf{R}^2$. Considererando x_2 em função de x_1, temos a equação da reta $x_2 = ax_1 + b$. Como temos inequações do tipo maior ou igual, todos os pontos acima e sobre a reta satisfazem a restrição. Assim, formando o conjunto de soluções viáveis.

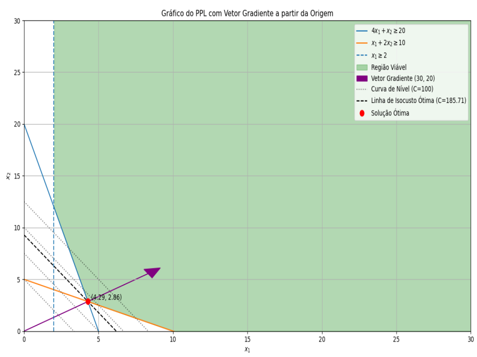

Figura 2: Feito no Phyton. Fonte: Autoria própria.

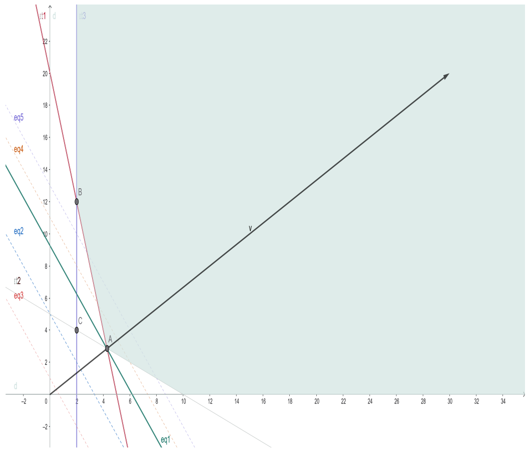

Figura 3: Feito no GeoGebra. Fonte: Autoria própria.

Nas Fig. 2 e 3 vemos a solução gráfica completa, podendo ser feita por dois softwares diferentes, tornando visíveis as etapas para a resolução do problema.

Conclusões

Através da modelagem matemática[3] é possível descrever a realidade de modo sistemático por meio da programação linear, podendo ser utilizada em diversos setores da indústria, produção e da economia, onde procura se obter a melhor tomada de decisão e solução para determinados problemas. O exemplo de minimização apresentado contém as etapas principais para a resolução por meio do método do gráfico.

Agradecimentos

Agradeço ao FNDE pelo suporte financeiro, o Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática da Universidade Federal do Amazonas pelo incentivo inicial e a minha orientadora Profª Doutora Flávia Jacinto pelo suporte durante a elaboração do trabalho.

Referências

[1] Bregalda, P. *Introdução à Programação Linear: Princípios e Exercícios*. Ilide Info. 165 p. 2008.

[2] dos Santos Macambira, A. F. U.; Maculan, N.; dos Anjos Formiga Cabral, L.; de Lima Pinto, L. *Programação Linear*. Universidade Federal do Rio de Janeiro — COS / UFRJ, Rio de Janeiro, RJ. 2016.

[3] Goldbarg, M. C.; Luna, H. P. L. *Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2 edition. 2005.

[4] Lachtermacher, G. *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*. LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., Rio de Janeiro, 5 edition. 2016.

[5] Lanzer, E. A. *Programação Linear: Conceitos e Aplicações*. Série PNPE, 4. IPEA/INPES, Rio de Janeiro, 2 edition. 257 p. 1988.

[6] Yoshida, L. K. *Programação Linear*. LTC. 1987.