

Fundamentos da Geometria Lorentziana

Ana Lúcia Menezes de Freitas da Silva^{1*} (LM), Inês Silva de Oliveira Padilha² (PM)

¹Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69080-900, Manaus, AM, Brasil.

**analucia.freitas137@gmail.com*, **in_math@ufam.edu.br*

Palavras-Chave: Cone de Luz, espaço-tempo de Minkowski, Caráter causal.

Introdução

Em 1905, Albert Einstein formulou a teoria da Relatividade Especial, cujo postulado central estabelece que a velocidade da luz é uma constante universal, independente do movimento do observador. Essa formulação surgiu da necessidade de compatibilizar as leis da mecânica com as equações de Maxwell, que descrevem o comportamento do campo eletromagnético e permanecem invariantes apenas sob as transformações adequadas. As transformações de Galileu, válidas na mecânica clássica, não preservavam essa invariância, o que levou à substituição delas pelas transformações de Lorentz, responsáveis por unificar espaço e tempo em um único quadro teórico.³ Em 1907, Hermann Minkowski traduziu essa concepção para a linguagem do espaço-tempo, descrito pela geometria de Lorentz-Minkowski, na qual o espaço-tempo é representado por um produto interno pseudo-euclidiano que combina dimensões espaciais e temporais. O objetivo deste trabalho é apresentar os fundamentos da geometria lorentziana. Analisamos as principais distinções da métrica desse conjunto com a métrica euclidiana e buscamos explorar não apenas a estrutura matemática subjacente, mas destacar de que maneira a Geometria Lorentziana contribui para a compreensão dos fenômenos astrofísicos e cosmológicos.

Material e Métodos

A pesquisa possui caráter bibliográfico e exploratório, fundamentando-se nas obras consultadas de Ivo Couto¹ e Rafael López², com embasamento físico disposto por Igor Padilha³, com o objetivo de compreender as bases matemáticas da métrica Lorentziana e suas implicações na física. Utilizou-se o software GeoGebra 3D na construção de modelos e visualizações do Cone de Luz e das superfícies associadas aos diferentes tipos de vetores no espaço de Lorentz-Minkowski.

Definição 0.1 (Métrica). *O espaço de Lorentz-Minkowski é o \mathbb{R}^3 , munido com suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar dotado da seguinte forma bilinear:*

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle_L = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2 \quad (1)$$

A métrica Lorentziana pode ser também representada

de forma matricial. Dados \mathbf{u} e $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^3$, tais que \mathbf{u} e \mathbf{v} são vetores na base canônica, escrevemos $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_L = \mathbf{u}^t \mathbf{G} \mathbf{v}$, onde:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essa matriz também poderá ser denotada como: $\mathbf{G} = \text{diag}[1, 1, -1]$, sendo \mathbf{u} e \mathbf{v} os vetores coluna.

Definição 0.2. *A pseudo-norma Lorentziana é a aplicação $\|\cdot\|_L : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|\mathbf{v}\|_L = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L|}$.*

Resultados e Discussão

Definição 0.3 (Caráter Causal). *Dizemos que um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^3$ é:*

- *Tipo espaço, se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L > 0$, ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$;*
- *Tipo tempo, se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L < 0$;*
- *Tipo luz, se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = 0$, mas $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.*

Exemplo 0.1. 1. *Se $\mathbf{v} = (4, 1, 2)$, então $\langle (4, 1, 2), (4, 1, 2) \rangle_L = 13 > 0$ e portanto \mathbf{v} é tipo espaço;*

2. *Se $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, então $\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle_L = -4 < 0$ e portanto \mathbf{v} é tipo tempo;*

3. *Se $\mathbf{v} = (6, 8, 10)$, então $\langle (6, 8, 10), (6, 8, 10) \rangle_L = 0$ e portanto \mathbf{v} é tipo luz.*

Todos os vetores em \mathbb{L}^3 , possuem um caráter causal único, permitindo uma representação geométrica que analisaremos através de superfícies específicas.

Seja $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{L}^3$, e $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = c \iff x^2 + y^2 - z^2 = c. \quad (2)$$

A expressão (2) representa: um cone, se $c = 0$; um hiperbolóide de uma folha, se $c > 0$; um hiperbolóide de duas folhas, se $c < 0$.

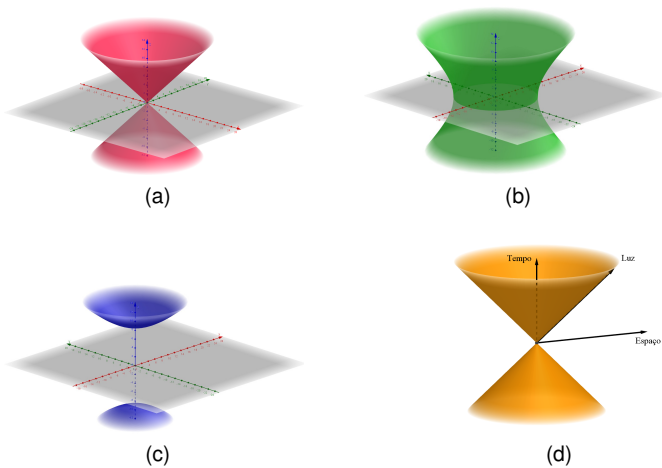


Figura 1: (a) Cone, (b) Hiperbolóide de 1 folha, (c) Hiperbolóide de 2 folhas, (d) Cone de luz, sendo este o objeto de estudo evidenciando as relações e interações geométricas no \mathbb{L}^3 . Fonte: Autoria própria.

Representação Geométrica

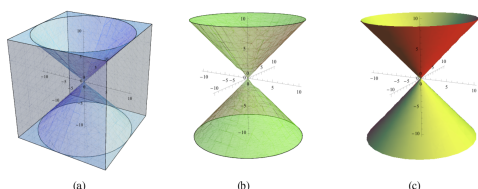


Figura 2: A localização de cada tipo causal dos vetores. O conjunto de todos os vetores tipo espaço é dado por $S = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle > 0\}$ (fig a). Analogamente definimos o conjunto de todos os vetores tipo tempo, dado por $T = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle < 0\}$ (fig b), e por fim, o conjunto de todos os vetores tipo luz, chamado de **Cone de luz**, dado por $C = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ (fig c). Fonte: Autoria própria.

Subespaços do \mathbb{L}^3 : A noção de caráter causal pode ser generalizada para outros objetos geométricos, como os subespaços de \mathbb{L}^n .

Ortogonalidade No espaço de Lorentz-Minkowski, a ortogonalidade entre dois vetores é definida pelo produto escalar lorentziano nulo. Diferentemente do caso euclidiano, essa condição reflete a estrutura causal do espaço-tempo, sendo fundamental para descrever as relações entre direções espaciais e temporais.

Definição 0.4 (Ortogonalidade). *Dois vetores $u, v \in \mathbb{L}^3$ são (Lorentz-)ortogonais, se $\langle u, v \rangle_{\mathbb{L}} = 0$.*

Definição 0.5 (Complemento Ortogonal). *Seja U um subespaço do \mathbb{L}^3 (notado $U \leq \mathbb{L}^3$). O complemento (Lorentz-)ortogonal de U é:*

$$U^\perp := \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle u, v \rangle_{\mathbb{L}} = 0, \forall u \in U\}$$

Proposição 0.1. *Seja $\pi \subseteq \mathbb{L}^3$ um plano, $\pi : ax + by + cz = 0$. Se $c = 0$, então π é tipo tempo.*

Teorema 0.1. *Seja $L \leq \mathbb{L}^3$ uma reta passando pela origem. Então o caráter causal de L é o mesmo de qualquer vetor que dê a sua direção.*

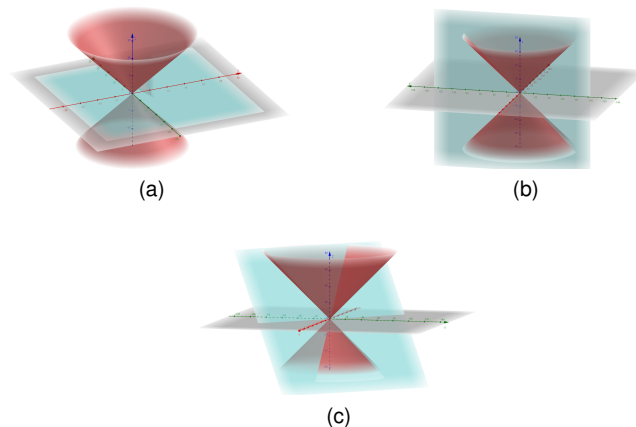


Figura 3: (a) Plano tipo espaço; (b) Plano tipo tempo; (c) Plano tipo luz. Fonte: Autoria própria.

Teorema 0.2. *Seja $\pi \leq \mathbb{L}^3$ um plano, $\pi : ax + by + cz = 0$, e $n = (a, b, c)$ o vetor euclidianamente normal a π . Então:*

- π é tipo espaço $\Leftrightarrow n$ é tipo tempo;
- π é tipo tempo $\Leftrightarrow n$ é tipo espaço;
- π é tipo luz $\Leftrightarrow n$ é tipo luz.

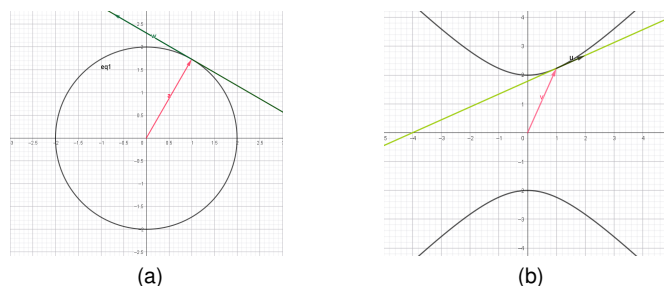


Figura 4: (a) Ortogonalidade Euclideana (b) Ortogonalidade Lorentziana. Fonte: Autoria própria.

Conclusões

Na geometria Lorentziana, a métrica define a estrutura do espaço-tempo, classificando o caráter causal dos vetores, uma vez que o produto escalar não é positivo definido. Essa característica fundamenta a noção de cone de luz, elemento essencial para compreender os limites causais entre eventos. A análise dessas propriedades revela o comportamento geométrico e físico do espaço-tempo, permitindo uma compreensão mais profunda das relações entre movimento e causalidade.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ao PET matemática e a minha orientadora, pela sua disposição e paciência.

Referências

- [1] Couto, I. T. Introdução à geometria diferencial lorentziana. Relatório final de iniciação científica, USP. 2023.
- [2] Lopez, R. Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space. *Mathematics Subject Classification*, 53A10. 2000.
- [3] Padilha, I. T. Notas de aula: A relatividade restrita e o espaço-tempo; a relatividade da simultaneidade. Manaus-AM, UFAM. 2024.