

Análise do Modelo SIRS Alternativo e sua Aplicação na Dinâmica da Malária na Amazônia

Vitor de Souza Oliveira^{1*}, Silvia Dias de Souza²

¹Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática - DM, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 1200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

²Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática - DM, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 1200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

*vitor-souza.oliveira@ufam.edu.br

Palavras-Chave: Epidemiologia, Malária, Modelagem Matemática.

Introdução

Os modelos matemáticos epidemiológicos representam ferramentas fundamentais para compreender e prever a dinâmica de disseminação de doenças infecciosas. Dentre as abordagens mais consolidadas, destacam-se os modelos compartimentais, que categorizam os indivíduos de acordo com seu estado de saúde. Nesta estrutura, a população é subdividida em classes, como: *Suscetíveis* (S), que podem contrair a infecção; *Infectados* (I), que contraíram a doença e podem transmiti-la; e *Removidos* (R), que se recuperaram e estão temporária ou permanentemente imunes.

Neste estudo, é feita a análise do modelo *SIRS*, que se caracteriza por uma imunidade de curta duração, ou seja, os indivíduos recuperados eventualmente retornam à classe dos suscetíveis³. A análise teórica é conduzida pela interpretação do modelo como um sistema autônomo no plano, investigando a existência e a natureza dos pontos de equilíbrio e descrevendo suas trajetórias através do plano de fase. Por fim, é apresentada a aplicação de modelo *SIRS*, na descrição de casos de malária na Região Amazônica¹, onde a doença representa uma preocupante questão de saúde pública.

Material e Métodos

O modelo *SIRS* proposto descreve a população dividida em três classes: Suscetíveis ($S(t)$), Infectados ($I(t)$) e Removidos ($R(t)$). Consideramos a população total N constante e que não há dinâmica vital³. Desta modo, o sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + pR, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - pR. \end{cases} \quad (1)$$

Onde β é a força de infecção, γ é a taxa de remoção e p é a taxa com que os indivíduos recuperados perdem

a imunidade.

Para particularizar o modelo (1), consideramos que numa determinada população, ou seja, em regiões onde a imunidade é baixa, assumindo que $pI \simeq pR$, onde $\gamma = p + q$, dizemos que a população possivelmente não ficará imune durante muito tempo. Desta forma, descrevemos o Modelo Alternativo SIRS pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI + pR, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = qI. \end{cases} \quad (2)$$

Onde q é taxa com a qual os indivíduos recuperados adquirem a imunidade, $\beta, \gamma, q > 0$ e $N = S + I + R$.

Os pontos de equilíbrio são obtidos quando todas as variações são identicamente nulas. Logo, os pontos de equilíbrio de (2) são todos da forma $(S^*, 0, N - S^*)$, cuja estabilidade depende das condições iniciais. Para determinar se a doença se espalhará ou não, utiliza-se o Número de Reprodutividade Basal R_0 . Este parâmetro indica o seguinte:

- se $R_0 < 1$, a doença vai se extinguir.
- se $R_0 > 1$, teremos uma epidemia.

Para a análise da trajetória da doença no plano de fase (S, I) , calcula-se a derivada de I em relação a S :

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma}{-\beta SI + p} = -1 + \frac{q}{p - \beta S}$$

Resultados e Discussão

Para a aplicação do Modelo Alternativo *SIRS*, foram utilizados dados da malária na Região Amazônica. Nesta região tem sido preocupante, pois é onde se concentra 90% dos casos de contaminação em todo o Brasil, a análise utilizou os casos confirmados de 1990 a 2009. Na Figura 1, são apresentados os dados referentes aos casos

confirmados de malária na Amazônia, no período compreendido entre 1990 e 2009. O gráfico foi gerado por meio do software Excel.

Para obter a solução numérica do modelo com os dados reais, foi necessário determinar os parâmetros β e γ .

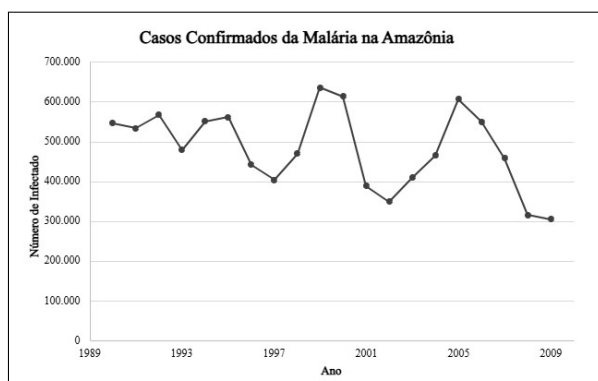


Figura 1: Casos de malária na Região Amazônica (1990-2009).

Para estimar a força de infecção β , adotou-se a interpretação proposta por Gay², que considera a força de infecção como $\beta = I/N$. Utilizando dados populacionais da região e o número de novos casos de malária para os anos de 1991, 1996 e 2000, calculou-se um valor médio, resultando em $\beta = 0.047$.

Agora, para estimar a taxa de remoção γ , aplicou-se técnicas de regressão linear, utilizando o número de infectados entre 1990 e 2009. A equação da reta de ajuste obtida foi $y = -0.0076x + 0.5616$. O coeficiente angular, $a = -0.0076$, foi interpretado como a variação da população de infectados no tempo, ou seja, $\frac{dI}{dt} = a$. Com isso, o parâmetro γ foi calculado através da seguinte relação:

$$a = \beta SI - \gamma I,$$

Utilizando os valores médios de β , S e I , o valor de γ foi estimado.

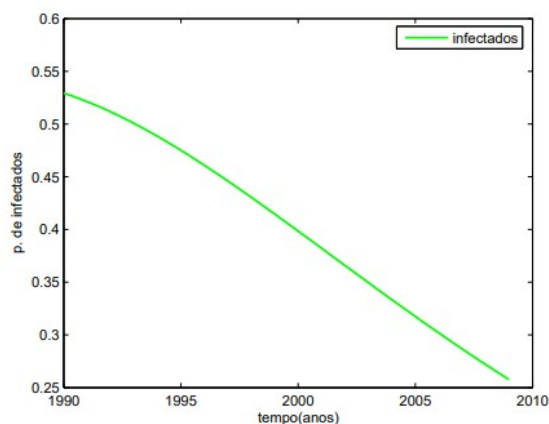


Figura 2: Número de Infectados: considerado $S(0) = 11.410118$, $I(0) = 0.529336$ e $R(0) = 0$ e parâmetro $\beta = 0.047$, $\gamma = 0.55$, supondo que $p = 0.40$, $q = 0.15$ e $R_0 = 0.97$.

Com os parâmetros definidos, a solução numérica do modelo foi obtida, conforme a Figura 2.

A Figura 2 mostra que a população de indivíduos infectados, segundo o modelo, tende a diminuir durante os anos de 1990 a 2009, o que é consistente com a tendência geral dos dados e com o valor de $R_0 < 1$ encontrado no estudo.

Conclusões

A aplicação do Modelo SIRS alternativo aos dados de malária na Amazônia mostrou-se eficaz em representar a dinâmica da doença. O valor do Número de Reprodutibilidade Basal $R_0 = 0,97$, inferior a 1, confirma a tendência de declínio nos casos de infectados observada entre 1990 e 2009. O estudo comprova, portanto, que o modelo é uma ferramenta válida para a análise de cenários epidemiológicos de doenças com imunidade temporária, podendo auxiliar na orientação de estratégias de saúde pública.

Agradecimentos

Agradeço ao FNDE pelo suporte financeiro. Ao Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática da Universidade Federal do Amazonas, pelo incentivo inicial. Meu profundo agradecimento à minha orientadora, a Prof^a. Doutora Silvia D. Souza, pelo suporte e orientação.

Referências

- [1] Bassanezi, R.; Macufa, M. Modelo epidemiológico alternativo para a malária. *BIOMATEMÁTICA*, 21:13 – 22. 2011.
- [2] Gay, N. J. A model of long-term decline in the transmissibility of an infectious disease: implications for the incidence of hepatitis a. *International Journal of Epidemiology*, 25(4):854–861. 1996.
- [3] Luiz, M. H. R. Modelos matemáticos em epidemiologia. Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP. 2012.