O Teorema do Ponto Fixo de Banach

David Nogueira Caldas [1] Ederson Ricardo Frühling Dutra [2]

Universidade Federal do Amazonas , Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

davidcaldas976@gmail.com ederson.dutra@ufam.edu.br

Palavras-Chave: Espaços Métricos, Ponto Fixo de Banach, Contração, Sequência de Cauchy, Espaços Métricos Completos, EDO's.

Introdução

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como teorema do ponto fixo de Banach, é um resultado matemático da análise funcional, um ramo da matemática. Ele pertence à classe dos teoremas do ponto fixo e garante, além da existência e unicidade de um ponto fixo, a convergência da iteração de ponto fixo. Assim, a afirmação é construtiva, pois fornece um método para determinar o ponto fixo e uma estimativa do erro correspondente.

Com o teorema do ponto fixo de Banach, pode-se, por exemplo, demonstrar a convergência de métodos iterativos como o método de Newton, bem como provar o teorema de Picard–Lindelöf, que é a base da teoria de existência de equações diferenciais ordinárias.

O teorema recebe o nome de Stefan Banach, que o demonstrou em 1922, em sua tese de doutorado.

Material e Métodos

A metodologia adotada foi puramente **teórico-dedutiva**, fundamentada em conceitos clássicos de **Análise Funcional** e **Topologia**. O estudo exigiu a revisão rigorosa das definições de **Espaços Métricos Completos**, **Sequências de Cauchy** e, crucialmente, **Aplicações Contrativas** (Contração Forte), que servem como premissas do Teorema do Ponto Fixo de Banach (TPFB). O método principal consistiu na **demonstração da existência e unicidade** do ponto fixo, sendo ambas as conclusões garantidas pela condição de contração ($\lambda < 1$). A **existência** foi comprovada estabelecendo-se que a sequência iterada ($x_{n+1} = f(x_n)$) é de **Cauchy**, um fato que segue diretamente da propriedade de encolhimento uniforme da função. Em seguida, a **completude** do espaço métrico foi aplicada para confirmar a convergência para um ponto que pertence ao espaço. Finalmente, a **unicidade** da solução foi provada por argumentos de contradição baseados na mesma condição de contração, concluindo o rigor da análise.

Resultados e Discussão

Definição 0.1 (Espaço Métrico)**.** *Seja M um conjunto não vazio. Uma métrica em M é uma função*

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

que associa a cada par de pontos $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y, que satisfaz os seguintes postulados, para todo $x, y, z \in M$:

d1) $d(x, x) = 0$

d2) $d(x, y) > 0$

d3) $d(x, y) = d(y, x)$

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

O par (M, d) é dito espaço métrico, onde M é um conjunto e d uma métrica em M.

Definição 0.2 (Sequência de Cauchy)**.** *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) é dita ser de **Cauchy** quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \text{para todo } m, n > n_0.$$

Definição 0.3 (Contração Forte)**.** *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : M \to M$ é chamada de **contração forte** (ou Contração de Banach) se existe uma constante real λ tal que:*

1. $\mathbf{0} \leq \lambda < \mathbf{1}$ *(o coeficiente de contração);*
2. *Para todos os pontos $x, y \in M$, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \tag{1}$$

Definição 0.4 (Espaço Métrico Completo)**.** *Um espaço métrico (M, d) é dito **completo** se toda **sequência de Cauchy** em M for **convergente**.*

Isto significa que, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M, existe um ponto $x \in M$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

As definições apresentadas são de extrema importância para a fundamentação da Análise Matemática. Em particular, a noção de Espaço Métrico Completo (garantindo que todas as sequências de Cauchy convergem) e a definição de Contração Forte (garantindo um encolhimento uniforme das distâncias) estabelecem as condições necessárias e suficientes para o principal resultado desta área.

Teorema (Ponto Fixo de Banach). *Se M é um espaço métrico completo, toda contração*

$$f : M \to M$$

possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ a sequência (x_n) converge em M e $a = lim x_n$ é o único ponto fixo de f.

Conclusões

Este estudo confirmou o **Teorema do Ponto Fixo de Banach** como um dos resultados mais poderosos da Análise. A prova é clara: se a função é uma **Contração Forte** (encolhe distâncias) e o ambiente é um **Espaço Métrico Completo** (sem "buracos"), a solução (ponto fixo) existe e é única.

O valor real do teorema reside no seu método construtivo. Isso significa que ele não se limita a afirmar que uma solução existe, mas, crucialmente, oferece uma receita prática para encontrá-la: a sequência de iteração dada por $x_{n+1} = f(x_n)$. Esse aspecto o torna fundamental, com uma aplicação importante na garantia da existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias (EDOs).

Agradecimentos

Agradeço ao FNDE pelo suporte financeiro, o Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática da Universidade Federal do Amazonas pelo incentivo inicial e o meu orientador Profº Doutor Ederson Ricardo Frühling Dutra pelo suporte durante a elaboração do trabalho.

Referências

[1] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4.ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Projeto Euclides, 2009.

[2] https://repositorio.unesp.br/entities/publication/2ea37da1-e8ec-4f71-9fc5-5b57496629ba

[3] Viana, Marcelo, and José M. Espinar. Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice. Vol. 212. American Mathematical Society, 2021.

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Banach