



Curvas planas e espaciais: Aspectos geométricos e aplicações

Guilherme Batista Cavalcante (BM)¹, Inês Silva de Oliveira Padilha² (PM)

^{1,2} Universidade Federal do Amazonas, Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69080-900, Manaus AM, Brasil.

* guicavalcanteb11@gmail.com, in_math@ufam.edu.br

Palavras-Chave: Geometria diferencial, curvas regulares, curvatura, torção, isometrias.

Introdução

A Geometria Diferencial possibilita compreender curvas e superfícies sob uma perspectiva que alia rigor matemático e intuição geométrica, oferecendo descrições mais claras do que abordagens puramente algébricas. Seu estudo é fundamental para interpretar propriedades locais e globais desses objetos geométricos, além de apresentar aplicações em diversas áreas, como física, computação gráfica e robótica. Neste trabalho, iremos explorar as principais ferramentas associadas ao tratamento de curvas regulares no plano e no espaço, bem como noções introdutórias sobre isometrias em \mathbb{R}^3 , estabelecendo uma base sólida para investigações futuras em tópicos mais avançados da área.

Material e Métodos

O estudo foi conduzido por meio de uma pesquisa bibliográfica [1,2,3,4] acerca dos principais resultados e ferramentas sobre curvas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Para a visualização geométrica, foi utilizado o software Geogebra, que possibilita aos usuários visualizar e explorar objetos ou conceitos matemáticos de forma interativa. Os exemplos foram escolhidos com base na riqueza de detalhes e ferramentas utilizadas na sua construção, além de serem curvas interessantes de serem discutidas.

Resultados e Discussão

Para analisar curvas no plano e no espaço, foi essencial compreender algumas propriedades fundamentais. Para entender conceitos como o de curvatura, inicialmente consideramos o **vetor tangente** de uma curva como aquele que indica a direção e o sentido de variação da trajetória em um ponto dado. Esse vetor representa, portanto, a direção do movimento ao longo da curva, tendo magnitude proporcional à taxa de variação da posição em relação ao parâmetro considerado. O **vetor aceleração** de uma curva descreve como o movimento ao longo da curva muda de velocidade e direção. Em termos geométricos, ele não indica apenas aumento ou diminuição da velocidade, mas também nos fornece uma interpretação geométrica importante, pois o seu módulo, ou seja, seu comprimento, mede o quanto a curva está se “curvando” ou mudando de direção, o que coincide com o conceito de curvatura. Ao pensarmos em uma curva, é natural associá-la à ideia de algo “dobrado” ou “curvado”. Essa percepção intuitiva é justamente o ponto de partida para o conceito matemático de **curvatura**, que mede o quanto uma linha deixa de ser

reta. A **curvatura** mede o quanto uma curva se afasta da reta tangente em cada ponto. É importante ressaltar que a curvatura é maior em trajetórias mais fechadas e menor em trajetórias quase retas; em pontos muito pontiagudos, chamados cúspides, a curvatura tende ao infinito. Para curvas no espaço, além da curvatura surge também outro ente geométrico importante, denominado **torção**. A **torção** nos fornece uma leitura sobre o quanto uma curva espacial se afasta de um plano. É interessante pontuar que no estudo de curvas planas e espaciais o conceito de **isometrias** é fundamental e relevante. Tais aplicações, são transformações que preservam distâncias, e é possível caracterizá-las como composições entre translações e aplicações ortogonais. Tal estudo permite identificar simetrias e padrões de repetição ao longo das curvas. Após o entendimento dos conceitos citados, apresentamos o Teorema Fundamental das Curvas no Espaço, que garante que uma curva regular no espaço é determinada, a menos de uma isometria, por suas funções curvatura e torção. No caso de uma curva plana, basta considerar a torção nula, obtendo-se assim uma versão particular do resultado.

Vejamos a seguir alguns exemplos de curvas interessantes.

- Cicloide

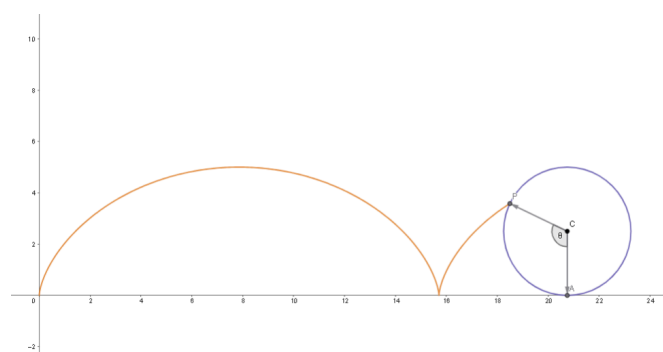


Figura 1. Cicloide
Fonte: De autoria própria.

A cicloide é a curva descrita pelo movimento de um ponto fixo de uma circunferência que rola, sem deslizar, sobre uma linha reta. Sua parametrização é dada por $P(\theta) = (r\theta - r\sin(\theta), r - r\cos(\theta))$. Quando o centro C da circunferência se desloca, seu movimento pode ser descrito como uma **rotação** em torno do ponto de contato com a linha, acompanhada de uma **translação** horizontal, isto é, O movimento da circunferência é uma **isometria plana** composta de uma rotação em torno do ponto de contato (que

varia com o tempo), e uma translação horizontal de módulo igual ao arco descrito pelo ponto de contato. A cicloide é periódica com período $T = 2\pi r$. Isso significa que após uma rotação completa ($\theta = 2\pi$), o ponto P retorna à linha de base, formando uma cúspide. Portanto, a cicloide pode ser vista como uma **série infinita de arcos congruentes**, cada um associado a uma rotação completa da circunferência. As **cúspides** (ou pontas) são pontos singulares onde a tangente é vertical e há uma **mudança de concavidade** no gráfico. Nestes pontos ocorre uma **singularidade**, pois há uma mudança brusca de direção, com isso é possível notar que o vetor tangente não está definido nesses pontos. Note que a sua curvatura diminui entre as cúspides. Como é uma curva plana, enquadra-se no Teorema Fundamental das Curvas pelo caso em que sua torção é nula.

- Espiral de Arquimedes

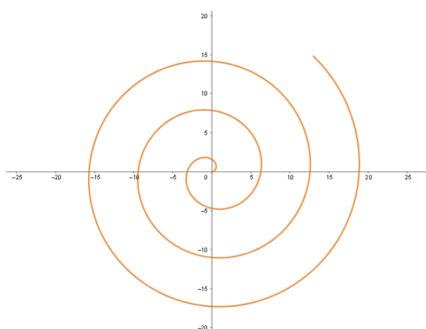


Figura 2. Espiral de Arquimedes
Fonte: De autoria própria.

A Espiral de Arquimedes é uma curva plana descrita pela equação polar $r(\theta) = a\theta$, $a > 0$, de tal forma que sua parametrização em coordenadas cartesianas é dada por $\beta(\theta) = (a\theta\cos(\theta), a\theta\sin(\theta))$, cujo afastamento ao centro cresce linearmente com θ .

Embora não apresente invariância por isometrias, exibe simetria radial periódica, isso quer dizer que a cada volta completa (2π radianos), a espiral se afasta sempre a mesma distância $2\pi a$. O seu vetor tangente mostra maior rotação próximo à origem e tendência retilínea para θ grande, com curvatura decrescente ao longo da espiral. Também representa um exemplo de curva plana, isto é, com torção nula.

- Hélice Circular

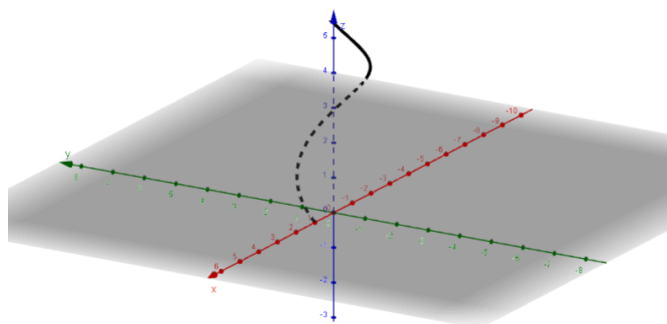


Figura 3. Hélice Circular
Fonte: De autoria própria.

A hélice circular é a curva obtida ao desenhar um ponto em movimento circular de raio $a > 0$ enquanto sobe (ou desce) uniformemente ao longo do eixo z . Ela enrola-se em torno de um cilindro de raio a com passo vertical $2\pi b$ por volta (onde $b \in \mathbb{R}$ controla a inclinação). Sua curvatura é constante, dependendo diretamente de seu raio a e sua inclinação b .

Aumentar o raio implica deixar a hélice mais curvada e isso aumenta sua curvatura, ao passo que aumentar sua inclinação torna a hélice mais "esticada", e sua curvatura diminui. No caso da torção τ , se $\tau > 0$, isso indica que a curva "sobe" girando no sentido anti-horário, por sua vez, se $\tau < 0$ tem-se uma hélice invertida. É o exemplo clássico de uma curva no espaço, pois mostra como sua curvatura e torção, ambas constantes, caracterizam a curva de modo único a menos de uma isometria.

- Curva de Viviani

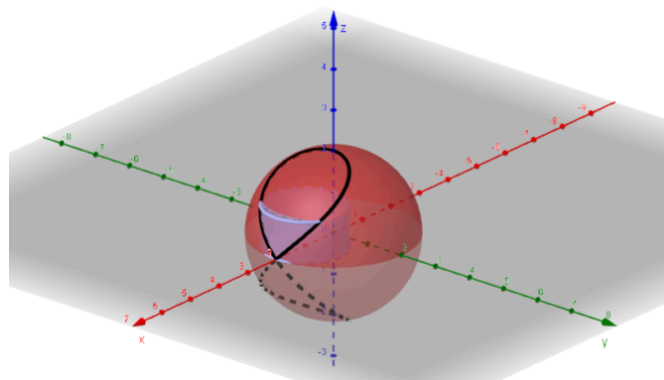


Figura 4. Curva de Viviani
Fonte: De autoria própria.

A curva de Viviani é uma curva espacial clássica, obtida pela interseção de uma esfera com um cilindro. A sua parametrização é dada por $\alpha(t) = (r\cos 2t, r\cos t \sin t, r\sin t)$ onde $r \in \mathbb{R}$. Para esta curva, a curvatura **não é constante**, mas varia suavemente ao longo da curva em regiões mais dobradas. Por ser uma curva espacial, a torção revela seu afastamento do plano, e sua construção reflete a presença de simetrias ligadas às isometrias das superfícies envolvidas.

Conclusões

Os comentários nos exemplos apresentados evidenciam a relevância das ferramentas da Geometria Diferencial para a análise de curvas sob uma perspectiva geométrica. Diferentemente da abordagem puramente algébrica, que muitas vezes carece de intuitividade e riqueza de detalhes, a geometria oferece uma descrição mais clara e visual desses objetos, além de contar com o rigor matemático necessário para a construção dos estudos.

Agradecimentos

Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática da UFAM pelo incentivo inicial e à minha orientadora por todo suporte fornecido durante a realização deste trabalho.

Referências

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W.; SILVA NETO, G. *Geometria Diferencial das Curvas em \mathbb{R}^2* . Brasília: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [2] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. São Paulo: SBM, 2013.
- [3] LIMA, E. L. *Isometrias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.
- [4] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.