Otimização no Espaço de Bergman A^2

José Orlando Mamed Silva de Sousa[1] Alireza Khatib[2] ,

[1]Universidade Federal do Amazonas, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.
[2]Universidade Federal do Amazonas, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil

Palavras-Chave: Espaços de Bergman, Otimização com Restrição, Multiplicadores de Lagrange, Kernel de Bergman, Espaços de Hilbert.

Introdução

O método dos Multiplicadores de Lagrange é uma ferramenta clássica para resolver problemas de otimização com restrições em espaços de dimensão finita. Este trabalho estende essa teoria para o contexto de espaços de funções de dimensão infinita, com foco no Espaço de Bergman $A^2(D)$. Este é um espaço de Hilbert composto por funções holomorfas de quadrado integrável no disco unitário D[2]. O objetivo central é utilizar a rica estrutura de $A^2(D)$, notadamente sua propriedade de ser um Espaço de Hilbert de Núcleo Reprodutor (RKHS), para resolver um problema variacional fundamental: encontrar a função de norma mínima que satisfaz alguma certa restrição, um problema central na teoria de funções de uma e várias variáveis complexas[3 1].

Material e Métodos

A metodologia é teórica, baseada na Análise Funcional e Análise Complexa. Generalizamos os conceitos de cálculo diferencial para um Espaço de Hilbert H, definindo a derivada de Gâteaux e o gradiente funcional, conforme abordado em textos de análise funcional aplicada[6;5]. O Teorema da Representação de Riesz-Fréchet é a ferramenta chave que garante a existência e unicidade deste gradiente, conectando a derivada direcional ao produto interno do espaço. O método principal é a aplicação do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para Espaços de Hilbert. Para tal, foi necessário construir os elementos do espaço $A^2(D)$, incluindo a derivação de uma base ortonormal e o cálculo explícito do seu núcleo reprodutor, o Kernel de Bergman[2].

Resultados e Discussão

O resultado central foi a solução explícita do problema de otimização. Demonstrou-se que o conjunto $\{\sqrt{(n+1)/\pi}\, z^n\}_{n=0}^{\infty}$ constitui um sistema ortonormal completo para $A^2(D)$. Utilizando esta base, o Kernel de Bergman para o disco unitário foi calculado, resultando na fórmula $K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2}$, um resultado clássico da teoria[2]. Para minimizar a norma $J(f) = ||f||^2$ sob a restrição $G(f) = f(z_0) - 1 = 0$, calculamos os gradientes funcionais, obtendo $\nabla J(f) = 2f$ e $\nabla G(f) = K_{z_0}$, onde $K_{z_0}(z) = K(z, z_0)$. A aplicação do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange[6] revelou que a função minimizadora f deve ser proporcional ao kernel: $f(z) = c \cdot K_{z_0}(z)$. A constante foi determinada pela restrição, levando à solução única $f(z) = \frac{K(z,z_0)}{K(z_0,z_0)}$. Disso, o valor mínimo da norma ao quadrado é $||f||^2 = K(z_0, z_0)^{-1} = \pi(1-|z_0|^2)^2$.

Conclusões

Este estudo demonstrou a generalização do método dos Multiplicadores de Lagrange para o Espaço de Bergman $A^2(D)$. A estrutura de RKHS foi fundamental, pois permitiu representar o funcional de avaliação pontual via produto interno[5]. O resultado evidencia uma conexão profunda entre otimização e a geometria do espaço: a solução para o problema de norma mínima é o próprio Kernel de Bergman normalizado. Isso ilustra como o kernel não apenas "reproduz"valores, mas também codifica soluções para problemas variacionais importantes.[4]

Agradecimentos

Agradecemos ao PET - Matemática, à Universidade Federal do Amazonas e ao Departamento de Matemática pela infraestrutura, ao FNDE pelo financiamento e aos docentes do Departamento de Matemática por seus conhecimentos transmitidos.

Referências

[1] Cordaro, P. D.; da Silva Junior, A. V. Funções harmônicas. Technical report, IME USP. Notas de Aula. 2025.

[2] Hedenmalm, H.; Korenblum, B.; Zhu, K. *Theory of Bergman Spaces*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. 2000.

[3] Krantz, S. G. *Function Theory of Several Complex Variables*. AMS Chelsea Publishing, 2nd edition. 2001.

[4] Lima, A. d. S. Um estudo de funções harmônicas e princípio do máximo. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Alagoas. 2024.

[5] Moura, C. A. d. *Análise Funcional para aplicações*. Editora Ciência Moderna. 2010.

[6] Zeidler, E. *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences. Springer. 1995.