

EQUIVALÊNCIA MATEMÁTICA ENTRE A GERAÇÃO DE VETORES DE PESO DO NBI E O *SIMPLEX-LATTICE DESIGN*

Gabriel Victor de Lima – d25101099@unifei.edu.br
Leonardo Elias Pereira – leonardoelias.estudante@unifei.edu.br
Anderson Paulo de Paiva – andersonppaiva@unifei.edu.br

Palavras-chave: Otimização multiobjetivo, Design de Experimentos, Design de Misturas, *Simplex-Lattice*, *Normal Boundary Intersection*.

1. INTRODUÇÃO

A otimização multiobjetivo (MO) é uma abordagem essencial em problemas de engenharia e ciências aplicadas, nos quais múltiplos critérios de desempenho precisam ser considerados de forma simultânea e frequentemente conflitante. O método *Normal Boundary Intersection* (NBI) é uma técnica robusta para mapear essa fronteira, superando limitações de métodos tradicionais. Sua formulação depende da geração de um conjunto de vetores de pesos, β , que definem os subproblemas de otimização. Das e Dennis (1998) propuseram um algoritmo em árvore para gerar esses vetores de forma uniforme.

Paralelamente, na área de planejamento de experimentos (DOE), o *Simplex-Lattice Design* é um método clássico para estudar misturas, onde os componentes são expressos como proporções que somam 1 (Cornell, 2002; Montgomery, 2017). A estrutura matemática para gerar os pontos experimentais nesse método é idêntica à utilizada para gerar os vetores β no NBI. Apesar da ampla aplicação de ambos, a conexão explícita entre eles é raramente explorada na literatura. Este artigo demonstra formalmente essa equivalência e propõe o uso de ferramentas de DOE para a geração dos vetores do NBI.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 Referencial teórico

O NBI define uma fronteira de Pareto a partir da combinação convexa dos mínimos individuais das funções objetivo, representados por vetores β que somam 1. Cada vetor β gera um subproblema ao longo de uma reta normal ao Convex Hull of Individual Minima (CHIM). Para n funções objetivo, os vetores β são gerados com um espaçamento uniforme δ . O número total de subproblemas (N_{sub}) é dado pela combinação:

$$N_{sub} = \binom{n + p - 1}{p}, \text{ onde } p = \frac{1}{\delta} \quad (1)$$

No *Simplex-Lattice Design*, as proporções dos componentes de uma mistura são igualmente espaçadas, formando o mesmo conjunto de combinações convexas. Para q componentes de uma mistura, os pontos experimentais são gerados com base em um grau m . O número total de pontos (N_{DOE}) é dado por (Scheffé, 1958):

$$N_{sub} = \binom{q + m - 1}{m} \quad (2)$$

A equivalência matemática torna-se explícita ao considerarmos o número de objetivos n igual ao número de componentes q ($n = q$) e o inverso do espaçamento δ igual ao grau do *lattice* m ($\delta = \frac{1}{m}$). Sob essas condições, as duas fórmulas são idênticas. Em ambos os métodos, os vetores gerados são combinações convexas cujos elementos somam 1. A diferença reside apenas na interpretação: pesos de objetivos no NBI e proporções de componentes no DOE.

2.2 Metodologia

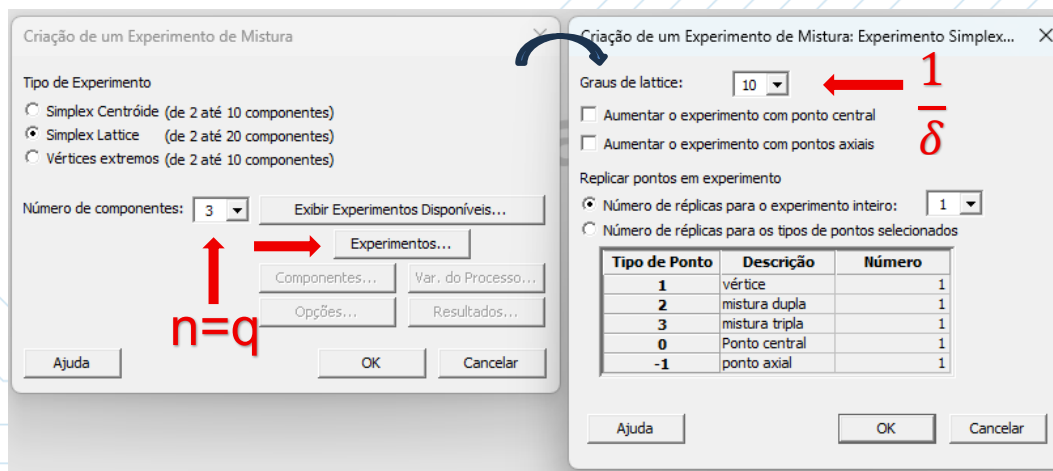
A geração dos vetores β foi realizada no *software* Minitab®, utilizando o módulo *Mixture Design* configurado para um *Simplex-Lattice Design* com três componentes ($q = 3$) e dois graus de refinamento ($m = 2$ e $m = 10$). O procedimento seguiu as etapas:

1. Selecionar *Stat > DOE > Mixture > Create Mixture Design*.

- Escolha *Simplex-Lattice*. Informe o número de componentes da mistura. Esse número é igual ao número de objetivos do MO (exemplo: $n=q=3$).
- Definir o grau *lattice*. Esse valor corresponde ao inverso do espaçamento (δ) utilizado no NBI. Desmarque as opções de aumentar o experimento com pontos centrais e axiais e manter o número de réplicas em 1.

A Figura 1 apresenta o roteiro para gerar os vetores β via Minitab®, ilustrando a equivalência entre os parâmetros do *Simplex-Lattice* (m) e do NBI (δ).

Figura 1 – Etapas de criação do *Simplex-Lattice Design* no Minitab® e relação com os parâmetros do NBI ($n=q$, $1/\delta = m$).



Fonte: Autores (2025)

- Clique em OK. O Minitab® criará uma tabela com todas as combinações de proporções onde cada linha corresponde a um vetor β .
- Use a opção Stat > DOE > Mixture > Mixture Plot para visualizar os pontos do design dentro do simplexo.

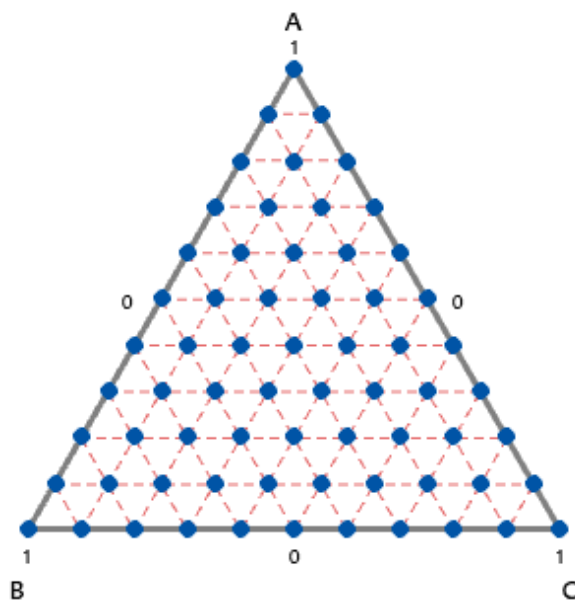
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para ilustrar a equivalência, consideramos um problema com três objetivos ($n = q = 3$). Utilizando um grau $m = 10$ no *Simplex-Lattice*, o que corresponde a um espaçamento $\delta = 0,1$ no NBI, ambos os métodos geram exatamente 66 pontos (ou

vetores β). Essa equivalência permite o uso de *softwares* estatísticos e bibliotecas preexistentes em R ou Python para gerar os vetores β .

A Figura 2 demonstra a geração de 66 pontos para um *Simplex-Lattice* $\{3,10\}$, que corresponde exatamente ao número de subproblemas do NBI para 3 objetivos com espaçamento de 10%. Essa abordagem simplifica drasticamente a implementação do NBI, eliminando a necessidade de algoritmos customizados para a geração dos vetores.

Figura 2 - Pontos gerados via *Simplex-Lattice* $\{3,10\}$ no Minitab®, equivalentes aos 66 vetores β do NBI com $n=3$ e $\delta=0,1$.

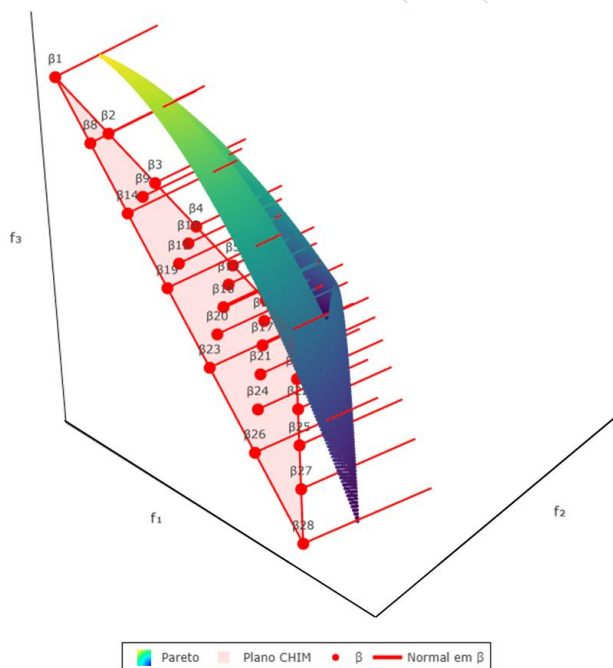


Fonte: Autores (2025)

A Figura 3 evidencia a disposição regular dos vetores β no plano CHIM e sua interseção ortogonal com a superfície de Pareto, demonstrando a correspondência direta entre a malha gerada pelo *Simplex-Lattice* e o conjunto de subproblemas NBI.

A integração entre o DOE e o método *Normal Boundary Intersection* simplifica a geração dos vetores de peso β , tornando o processo de discretização da fronteira de Pareto mais intuitivo e controlável. Essa abordagem favorece a obtenção de soluções distribuídas de forma uniforme e simplifica a aplicação do NBI em problemas de engenharia e otimização multiobjetivo (Pereira et al., 2025).

Figura 3 – Superfície de Pareto com interseções normais espaçadas uniformemente via *Simplex-Lattice*



Fonte: Autores (2025)

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho demonstrou a equivalência matemática formal entre a geração de vetores de pesos no método NBI e a construção de um *Simplex-Lattice Design*. A relação direta entre os parâmetros de discretização dos métodos ($\delta = \frac{1}{m}$) valida essa conexão.

A principal contribuição é a proposta de uma ponte interdisciplinar, permitindo que pesquisadores de otimização utilizem ferramentas de DOE consolidadas (Minitab®, R, Python) para gerar de forma sistemática e confiável os subproblemas do NBI. Essa abordagem não apenas simplifica a aplicação do método, mas também abre novas perspectivas, como o uso de modelos de superfície de resposta para analisar o impacto dos pesos na qualidade da Fronteira de Pareto.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) pelo apoio técnico e científico ao desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

CORNELL, J. A. Experiments with mixtures: designs, models, and the analysis of mixture data. 3. ed. New York: Wiley, 2002.

DAS, I.; DENNIS, J. E. Normal-Boundary Intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM Journal on Optimization**, v. 8, n. 3, p. 631-657, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1052623496307510>.

MONTGOMERY, D. C. Design and analysis of experiments. 9. ed. Hoboken: Wiley, 2017.

PEREIRA, M. C.; RIBEIRO, C. T.; MENDES, R. R. A.; CAMPOS, P. H. S.; PAIVA, A. P. de. A hybrid multivariate normal boundary intersection approach with post-optimization assisted by mixture design of experiments. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 162, 112510, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2025.112510>.

SCHEFFÉ, H. Experiments with mixtures. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, v. 20, n. 2, p. 344-360, 1958.