"Planeta Água: a cultura oceânica para enfrentar as mudanças climáticas no meu território"

SECT - ICE

XII SECT ICE Semana de Ciência e Tecnologia

20 a 23 de Outubro de 2025

Realização:

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATA

Fundamentos do Método Simplex

Luís Fellype Fournier Da Silva [1] Roberto Cristovão Mesquita Silva [2]

Universidade Federal do Amazonas , Departamento de Matemática, Av. Rodrigo Otávio Jordão Ramos, 6200, Coroado I, 69067-005, Manaus AM, Brasil.

fellypefour@gmail.com rmesquita@ufam.edu.br

Palavras-Chave: Região viável,combinação convexa, vértice.

Introdução

O Método Simplex é o algoritmo fundamental e mais utilizado para a resolução de problemas de Programação Linear (PL). A PL, por sua vez, é uma técnica da Pesquisa Operacional (PO) para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função objetivo linear sujeita a um conjunto de restrições lineares. O Simplex foi criado por George Dantzig em 1947.

O Método Simplex busca responder à seguinte pergunta: Qual a combinação ótima (o conjunto de valores para as variáveis de decisão) que maximiza ou minimiza a Função Objetivo linear, satisfazendo simultaneamente todas as restrições lineares do sistema, e garantindo a não-negatividade das variáveis? (Busca o ponto extremo (vértice) ótimo no poliedro de soluções viáveis).

O Método Simplex é relevante e importante porque: a) Permite resolver problemas de Programação Linear com múltiplas variáveis de decisão e restrições (indo além da limitação do método gráfico); b) É um algoritmo iterativo e sistemático que garante a obtenção da solução ótima global (caso exista) em um número finito de passos; c) É amplamente aplicável na tomada de decisão gerencial em áreas como produção, logística, alocação de recursos, finanças e controle de estoque.

Objetivo Geral: Determinar a Solução Básica Viável (SBV) que otimiza (maximiza ou minimiza) a Função Objetivo de um problema de Programação Linear. Objetivos Específicos: 1. Converter o PPL para a forma padrão; 2. Identificar uma Solução Básica Viável inicial; 3. Iterar, movendo-se de uma SBV para uma adjacente "melhor"(que melhora o valor da FO); 4. Aplicar o critério de parada (condição de otimalidade) para encontrar o ponto ótimo.

Material e Métodos

O método Simplex é fundamentado por dois teoremas principais sendo eles: O teorema que diz que o conjunto de soluções viáveis de um problema de programação linear é convexo e o outo diz que a solução ótima será um dos vértice do conjunto convexo. O algoritmo é ultilizado computacionalmente pelo software **Solver**.

O Método Simplex é um procedimento iterativo que se move de um vértice (Solução Básica Viável) para um adjacente até encontrar a solução ótima. O processo é geralmente realizado utilizando a Tabela Simplex.

a) Montagem da Tabela Inicial:

Reescrever a Função Objetivo (FO) de forma que $Z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... = 0$

Organizar os coeficientes das variáveis de decisão, folga, excesso e artificiais, junto aos termos independentes (lado direito), em uma matriz (o Quadro Simplex inicial).

b) Critério de Otimalidade (Parada):

Para Maximizar: O processo para quando todos os coeficientes na linha da Função Objetivo (Z) são não-negativos $(c_j - z_j \geq 0)$.

Para Minimizar: O processo para quando todos os coeficientes na linha da Função Objetivo (Z) são não-positivos $(c_j - z_j \leq 0)$.

c) Iteração (Pivoteamento):

Se a solução atual não for ótima, o algoritmo executa uma iteração:

Escolha da Variável de Entrada (Coluna Pivô): Selecionar a variável não-básica que, se entrar na base, mais melhorará o valor da FO.

Maximizar: Escolhe-se o coeficiente negativo de maior valor absoluto na linha Z.

Minimizar: Escolhe-se o coeficiente positivo de maior valor absoluto na linha Z.

Escolha da Variável de Saída (Linha Pivô): Aplicar a Regra da Razão Mínima.

Dividir o valor do lado direito (b_i)

pelos coeficientes estritamente positivos da Coluna Pivô. A linha associada à menor razão indica a variável básica que sairá da base.

Atualização do Quadro (Operações Elementares de Linha):

Transformar o Elemento Pivô (interseção da Coluna e Linha Pivô) em 1.

Transformar todos os outros elementos da Coluna Pivô em 0, utilizando operações elementares de linha (semelhantes ao método de Gauss-Jordan), para obter a nova Solução Básica Viável.

d) Interpretação dos Resultados:

Após a parada (atingir a otimalidade), as variáveis que estão na Base (Coluna Base) assumem o valor indicado na coluna do lado direito.

O valor ótimo de Z é lido na linha Z e na coluna do lado direito.

Resultados e Discussão

As maiores implicações do Simplex derivam de sua natureza algébrica e geométrica: a) Necessidade de Forma Padrão: O método exige que o PPL seja transformado em sua Forma Padrão, que envolve a conversão de inequações em equações pela adição de Variáveis de Folga $\leq$ ou pela subtração de Variáveis de Excesso (e adição de Variáveis Artificiais) $\geq$. Isso aumenta o número de variáveis.

b) Movimento Geométrico Controlado: Sua implicação é que ele transita sistematicamente apenas entre os vértices (pontos extremos) do poliedro de soluções viáveis, garantindo que a solução ótima seja encontrada sem precisar avaliar todos os pontos viáveis. c) Critérios de Entrada e Saída (Pivoteamento): A eficiência depende de critérios claros para determinar a variável não-básica que entra na base (regra do custo reduzido/otimalidade) e a variável básica que sai da base (regra da razão mínima/factibilidade), o que é a essência do passo iterativo (pivoteamento). d) Limitação: Embora eficaz, o Simplex tem uma complexidade teórica considerada exponencial no pior caso (embora seja geralmente rápido na prática). Para problemas com restrições e variáveis muito grandes (milhares), outros métodos como os de pontos interiores (Karmarkar) podem ser mais eficientes.

Um problema de programação linear é escrito na seguinte forma:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \; \forall \; i \in 1, ..., m$$

$$x_j \in \mathbb{Z}^+$$

Onde $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ são constantes e x_j são variáveis.

A região viável (ou factível) num problema de programação linear é o conjunto de todas as soluções que satisfazem simultaneamente todas as restrições do problema, incluindo as restrições de não-negatividade. Graficamente, é a região sombreada no plano cartesiano que representa a intersecção de todas as regiões definidas pelas desigualdades lineares do problema. Se esta região não existir, o problema é considerado inviável.

Um conjunto $\mathbb{X}$ é um conjunto convexo se para qualquer $x_1,\ x_2 \in \mathbb{X}$, $x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0,1], x \in \mathbb{X}$.

Exemplos:

I) $\mathbb{S}$ = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

II) $\mathbb{B}(a,r)$= $\{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}$

III) $\mathbb{X}$ = $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

As restrições de um problema de um programação linear podem ser denotadas respectivamente pelos seguintes conjuntos:

$\mathbb{X}_1$ = $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

$\mathbb{X}_2$ = $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

$\mathbb{X}_3$ = $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

Um ponto x de um conjunto convexo X chama-se ponto extremo de X ou vértice de X quando não pode ser escrito como combinaçao linear convexa de dois pontos distintos de X,ou seja, se $\nexists\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, tais que $x = \lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0,1]$

Os principais teoremas:

- Teorema 1 - O conjunto das soluções viáveis de um problema de programação linear é convexo.
- Teorema 2 - Uma solução básica viável do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto convexo. $\mathbb{X}_1$ = $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$

Conclusões

O Método Simplex responde à pergunta de pesquisa (Delimitação do Problema) ao fornecer os valores numéricos das variáveis de decisão que resultam no valor ótimo da Função Objetivo. Ele cumpriu os objetivos ao converter o problema para a forma padrão e, através de um processo iterativo de pivoteamento de variáveis básicas e não-básicas, alcançou a Solução Básica Viável ótima.

A relevância e justificativas se mantêm e são confirmadas pelos resultados. Como ferramenta de otimização para problemas lineares complexos, o Simplex continua a ser o padrão para a tomada de decisões em diversas indústrias e contextos, consolidando sua importância acadêmica e prática na Programação Linear.

Agradecimentos

Agradeço ao FNDE pelo suporte financeiro, o Programa de Educação Tutorial (PET) de Matemática da Universidade Federal do Amazonas pelo incentivo inicial e o meu orientador Profº Doutor Roberto Cristovão Mesquita Silva pelo suporte durante a elaboração do trabalho.
.

Referências

[1] Luzia Kazuko Yoshida . **Programação Linear**.Atual, São Paulo, 1987.

[2] Bregalda,P.F.e outros.**Introdução à Programação Linear**.Rio de Janeiro,Campus,1981.