

RELAÇÕES DIFERENCIAIS NA DETERMINAÇÃO E PLOTAGEM DA ELÁSTICA DE PÓRTICOS RETICULADOS COM BARRAS RETAS E CURVAS

Thaynara de Jesus Martins da Silva¹; Fernanda Gabriella Batista Santos²; Luis Fernando Sampaio Soares³

Resumo

A presente pesquisa busca apresentar as relações diferenciais e desenvolver um algoritmo para o cálculo da forma defletida de pórticos compostos por arcos de circunferência e elementos retos, considerando diferentes tipos de carregamentos em regime elástico-linear. O programa foi estruturado em Python e baseia-se no Método dos Elementos Finitos. As matrizes de rigidez e os vetores de carga foram obtidos pela inversão das matrizes de flexibilidade correspondentes, que são calculadas usando o Método das Forças. Além disso, a quadratura de Gauss-Legendre foi empregada para avaliar as integrais resultantes desse processo, fornecendo resultados mais precisos. A validação foi feita por meio de exemplos de autoria própria, assim como estruturas presentes na literatura técnica. Os modelos foram calculados e comparados com softwares comerciais. Assim, os deslocamentos e rotações obtidos pelo algoritmo mostraram-se eficientes e, na maioria dos casos, mais próximos dos calculados pelo Método dos Trabalhos Virtuais, além de exigir dados de entrada mais simples. Por fim, ao término deste projeto, o software será disponibilizado gratuitamente para a comunidade acadêmica como mais uma ferramenta de ensino e pesquisa.

Palavras-chave: Relações diferenciais; Elementos curvos; Método dos Elementos Finitos; Python; Quadratura de Gauss-Legendre.

Projeto Financiado pelo IFMA por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Tecnológica (PIBITI) para o Ensino Superior.

¹ Discente do Curso de Engenharia Civil do IFMA *Campus* São Luís Monte Castelo; E-mail: thaynaramartins@acad.ifma.edu.br

² Estudante do Doutorado pela Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo; E-mail: fernanda.gabriella@usp.br

⁴ Professor Dr. do Curso de Engenharia Civil do IFMA *Campus* São Luís Monte Castelo; E-mail: luisfernando-soares@ifma.edu.br

INTRODUÇÃO

A análise estrutural desempenha um papel essencial na engenharia civil, oferecendo técnicas e ferramentas para compreender como as estruturas respondem a diferentes tipos de carregamento. De acordo com Soriano (2006), seu principal objetivo é correlacionar as forças externas aplicadas ao sistema com os deslocamentos resultantes, reações de apoio e tensões internas, permitindo uma avaliação precisa do desempenho estrutural sob várias condições.

No âmbito deste projeto, são analisados os deslocamentos de pórticos reticulados compostos por elementos de eixo reto e curvo. Conforme destaca Martha (2010), tais pórticos estão presentes em pontes, edifícios e diversas outras estruturas, o que demanda métodos de análise mais precisos para a correta avaliação de suas deformações. Nesse sentido, a utilização de relações diferenciais permite uma caracterização mais rigorosa da linha elástica, sobretudo em situações que envolvem a variação do eixo da barra.

Atualmente, softwares baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), como o Ftool, são amplamente empregados na análise de estruturas bidimensionais regulares. Entretanto, sua aplicação em estruturas não convencionais, que incluem, por exemplo, elementos em arco, ainda encontra limitações no tratamento de suas particularidades. Diante disso, o presente trabalho propõe o desenvolvimento de um componente complementar ao PAE, programa similar, também fundamentado no Método dos Elementos Finitos (MEF) e concebido para a análise de estruturas com geometrias variadas.

O PAE conta com versões e módulos escritos em Fortran, Java e Python, os quais vêm sendo continuamente aprimorados ao longo de diferentes estudos. Nesse contexto, Melo et al. (2024) introduziram a análise de carregamentos térmicos em elementos retos e curvos, enquanto Oliveira et al. (2019) contribuíram para a implementação de uma interface gráfica orientada a objetos, tornando o programa mais acessível e intuitivo para os usuários.

O modelo proposto, por sua vez, possibilita o cálculo dos deslocamentos ao longo de toda a estrutura em estudo, determinando a forma defletida de pórticos constituídos por elementos de eixo reto e arcos de circunferência. Para tanto, utiliza equações diferenciais que relacionam as forças internas aos deslocamentos horizontais, verticais e

rotações nodais, permitindo, ao final, a representação gráfica do comportamento resultante.

METODOLOGIA

Inicialmente, o código foi desenvolvido para a análise de estruturas compostas por barras retas, para as quais as matrizes de rigidez e os vetores de carga são amplamente conhecidos e bem documentados, como exemplificado no trabalho de Martha (2010). Para elementos curvos, as matrizes de rigidez e os vetores de carga foram obtidos pela inversão das correspondentes matrizes de flexibilidade, calculadas por meio do Método das Forças. Para garantir a precisão das integrais envolvidas nesse processo, foi implementado o método numérico da quadratura de Gauss-Legendre, amplamente utilizado devido à sua eficiência e precisão.

Elementos Retos

Para a dedução das equações diferenciais, realizou-se uma análise baseada em formulações já estabelecidas para a linha elástica em elementos retos, as quais relacionam rotações e deslocamentos com forças internas. Segundo Martha (2010), o comportamento de vigas submetidas à flexão foi formalizado no início do século XIX por Navier, que desenvolveu uma teoria que, ao desprezar as deformações por cisalhamento, estabelece uma equação diferencial relacionando os deslocamentos transversais de uma viga, com momento de inércia constante, à taxa de carregamento distribuído transversalmente. Tal teoria é fundamentada em diversas hipóteses básicas, a saber:

- a. Os deslocamentos são pequenos comparados às dimensões da seção transversal;
- b. Hipótese de Bernoulli, que afirma que as seções planas de uma viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo neutro deformado após a flexão;
- c. O material apresenta comportamento linear-elástico (Lei de Hooke).

Assim, a equação diferencial de quarta ordem que relaciona as forças internas e a linha elástica para barras retas é dada pela Equação 1:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{d^3 v}{dx^3} = \frac{C(x)}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \theta(x) \Rightarrow v(x) \quad (1)$$

Onde $q(x)$ é a carga distribuída, $C(x)$ é o esforço cortante, $M(x)$ é o momento fletor, $\theta(x)$ é a rotação da seção transversal devido à flexão, $v(x)$ é o deslocamento transversal da viga, E é o módulo de elasticidade do material e I é o momento de inércia da seção transversal. Para calcular a rotação e a deflexão da viga, a equação do momento fletor é integrada duas vezes. Esse processo introduz constantes, que são determinadas a partir das condições de contorno.

Elementos em arco circular

Para elementos curvos cujos eixos seguem um arco circular, aplicou-se uma metodologia semelhante à utilizada para barras retas, com adaptações específicas. A Figura 1 mostra o elemento finito usado no PAE para a consideração de arcos circulares, onde α_1 e α_2 são os ângulos inicial e final medidos no sentido horário a partir do eixo x , enquanto R representa o raio do arco e α é o ângulo variável em torno do qual as equações são escritas. O elemento possui dois nós com três graus de liberdade cada. Os parâmetros u, v , e θ representam, respectivamente, os graus de liberdade horizontal, vertical e rotacional, enquanto os subscritos i e j denotam os nós inicial e final.

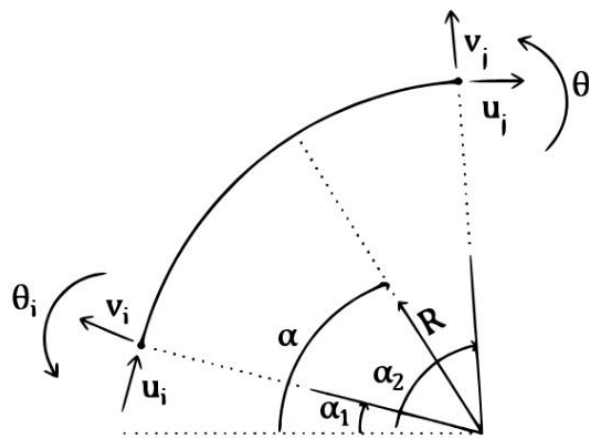


Figura 1 - Elemento genérico em arco circular.

A partir da equação do momento fletor, realizaram-se as integrações necessárias para calcular os deslocamentos ao longo do elemento, desprezando-se as contribuições do esforço cortante e normal. As expressões correspondentes podem ser consultadas em Soriano (2006). As relações diferenciais resultantes são apresentadas na Equação 2 para a rotação da seção transversal, e nas Equações 3 e 4 para os deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente, ambos expressos no sistema de coordenadas global.

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d\theta(\alpha)}{d\alpha} = M(\alpha) \quad (2)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dv(\alpha)}{d\alpha} = \theta(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (3)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{du(\alpha)}{d\alpha} = -\theta(\alpha) \cdot \text{cos}(\alpha) \quad (4)$$

As condições de contorno são aplicadas com base nos apoios da estrutura, a fim de determinar as constantes de integração a partir das integrais governantes. Isso resulta em equações que representam a linha elástica do elemento e permitem o cálculo dos deslocamentos em ambas as direções, bem como da rotação, em qualquer ponto ao longo da estrutura.

Equação geral

As equações mencionadas anteriormente, juntamente com alguns resultados do algoritmo, foram utilizadas para desenvolver expressões gerais que pudessem ser implementadas computacionalmente a fim de gerar a forma deformada e o comportamento rotacional de qualquer elemento finito em arco circular. Os parâmetros considerados incluem: cargas concentradas nas direções horizontal e vertical, o momento fletor no nó inicial, as cargas distribuídas nas direções horizontal e vertical, o ângulo inicial, o módulo de elasticidade, o momento de inércia e os graus de liberdade correspondentes ao nó inicial.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 ilustra um pórtico bidimensional adotado como exemplo, constituído por duas barras retas e um elemento em arco circular, submetido a cargas concentradas e distribuídas uniformemente. Para os elementos retos, os dados de entrada no PAE exigem a definição das coordenadas nodais, já o elemento curvo, descrito em coordenadas polares, demanda a definição dos ângulos inicial e final e do respectivo raio.

Propriedades de material	Propriedades geométricas
$E_c = 20GPa$	$I_f = \frac{0.20m \cdot (0.40m)^3}{12}$

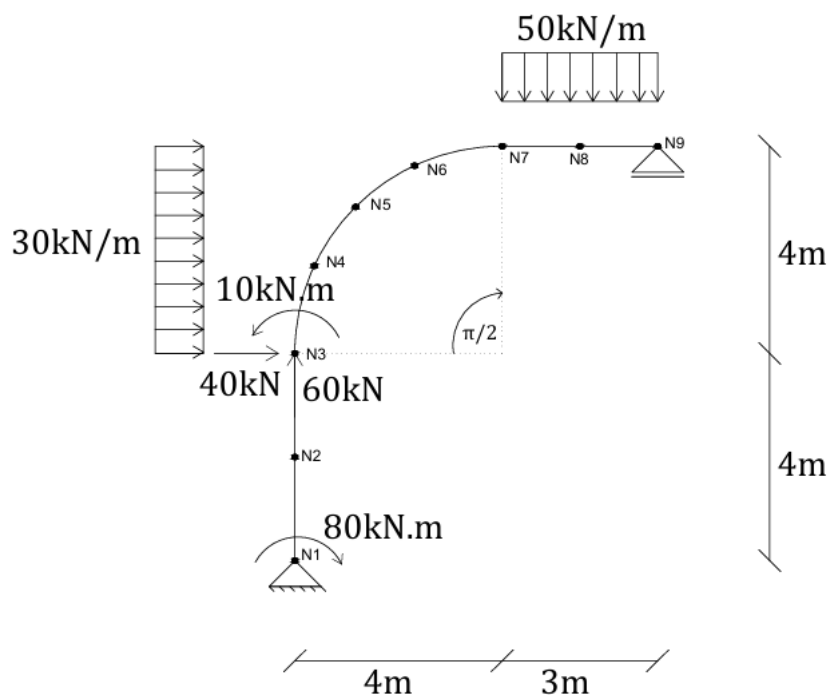


Figura 2 - Estrutura em pórtico utilizada para validação.

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para a estrutura proposta, cotejando as soluções calculadas pelo PAE com os resultados gerados pelo Ftool. Para efeito de comparação, no Ftool o arco foi subdividido em 36 elementos de barra reta.

Nó	Método	x (m)	y (m)	Deslocamento Dx (m)	Deslocamento Dy (m)	Rotação (rad)
2	Equação genérica	0,000	-2,000	$5,117 \cdot 10^{-1}$	$1,523 \cdot 10^{-7}$	$-2,421 \cdot 10^{-1}$
	Ftool			$5,218 \cdot 10^{-1}$	$1,725 \cdot 10^{-12}$	$-2,472 \cdot 10^{-1}$
3	Equação genérica	0,000	0,000	$9,485 \cdot 10^{-1}$	$3,436 \cdot 10^{-16}$	$-1,896 \cdot 10^{-1}$
	Ftool			$9,686 \cdot 10^{-1}$	$3,450 \cdot 10^{-12}$	$-1,946 \cdot 10^{-1}$
4	Equação genérica	0,375	1,690	1,217	$-5,536 \cdot 10^{-2}$	$-1,254 \cdot 10^{-1}$
	Ftool			1,245	$-5,738 \cdot 10^{-2}$	$-1,301 \cdot 10^{-1}$
5	Equação genérica	1,172	2,828	1,333	$-1,318 \cdot 10^{-1}$	$-7,121 \cdot 10^{-2}$
	Ftool			1,363	$-1,372 \cdot 10^{-1}$	$-7,473 \cdot 10^{-2}$
6	Equação genérica	2,310	3,625	1,368	$-1,826 \cdot 10^{-1}$	$-2,126 \cdot 10^{-2}$
	Ftool			1,403	$-1,909 \cdot 10^{-1}$	$-2,260 \cdot 10^{-2}$
7	Equação genérica	4,000	4,000	1,369	$-1,727 \cdot 10^{-1}$	$2,981 \cdot 10^{-2}$
	Ftool			1,404	$-1,808 \cdot 10^{-1}$	$3,122 \cdot 10^{-2}$
8	Equação genérica	5,500	4,000	1,369	$-1,029 \cdot 10^{-1}$	$6,070 \cdot 10^{-1}$
	Ftool			1,404	$-1,077 \cdot 10^{-1}$	$6,357 \cdot 10^{-2}$

Tabela 1 – Resultados.

Embora haja boa concordância entre ambos, o PAE destaca-se por simplificar de forma significativa a análise estrutural, pois dispõe de um elemento específico para

estruturas curvas, ao passo que o Ftool opera exclusivamente com elementos retos. Além disso, a formulação geral do PAE permite obter respostas de modo contínuo ao longo de todo o elemento, inclusive em pontos intermediários no domínio da estrutura, dispensando subdivisões adicionais e tornando o procedimento mais eficiente, direto e intuitivo.

CONCLUSÃO

O módulo proposto, integrado ao PAE, realiza a análise linear-elástica de pórticos compostos por elementos de dois nós, com três graus de liberdade em cada, abrangendo tanto barras retas quanto arcos circulares, submetidos a cargas nodais e distribuídas. A ferramenta possibilita, de maneira prática, a obtenção dos deslocamentos de uma estrutura complexa ao longo de todo o seu domínio, por meio de um processo de entrada de dados simples e objetivo. Essa característica, em comparação a softwares similares já consolidados, torna o PAE uma ferramenta complementar importante, tanto em contextos de ensino e aprendizagem quanto em pesquisas em áreas correlatas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal do Maranhão (IFMA) pelo suporte técnico e pelo incentivo contínuo à pesquisa e ao desenvolvimento científico.

Registro, igualmente, minha gratidão ao Prof. Dr. Luis Fernando Sampaio Soares e à então doutoranda Fernanda Gabriella Batista Santos Oliveira, pela orientação criteriosa e pelo acompanhamento atento, fundamentais para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MELO, L. A.; OLIVEIRA, F. G. B. S.; SOARES, L. F. S. **Arc-shaped elements in 2D program of frames subjected to thermal loading**. In: IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XLV, 2024. Proceedings [...]. 2024.

OLIVEIRA, F. G. B. S.; MULLER, A. S.; SOARES, L. F. S. **Object-oriented graphical interface for computational tool of two-dimensional elastic-linear analysis of bars with straight and curved axis**. In: IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, XL, 2019. Proceedings [...]. 2019.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas: método das forças e método dos deslocamentos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.