

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ESFORÇOS E DESLOCABILIDADES NO PAE-GRELHAS

Marco Antonio Pinho Leite¹; Luis Fernando Sampaio Soares²

Resumo

O presente trabalho visou o desenvolvimento de parte do módulo de pós-processamento do PAE-Grelhas, software gratuito de análise elástico-linear de grelhas compostas por barras retas e curvas. O programa que já conta com interface gráfica e cálculos nodais foi inicialmente desenvolvido em Fortran e "transcrito" para Python, e é baseado no Método dos Elementos Finitos. O principal objetivo esteve centrado na determinação, a partir das equações diferenciais, dos esforços internos (Momento, Cortante e Torção) e da linha elástica (translação vertical e rotações dos eixos no plano da estrutura) ao longo do domínio dos respectivos elementos. Resultados foram comparados com os obtidos por softwares similares disponíveis no mercado. Por fim, as expressões foram adicionadas ao PAE-GRELHAS e a versão atualizada será disposta para a comunidade científica.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Linha elástica. Python. Método dos Elementos Finitos.

Projeto financiado pela Fundação Nacional de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão – FAPEMA, por meio do Programa de Bolsas de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação do Ensino Superior (PIBITI Ensino Superior).

¹ Estudante de Engenharia Civil do IFMA – Campus São Luís, Monte Castelo. Email: marco.leite@acad.ifma.edu.br

² Prof. Dr. do Departamento de Construção Civil do IFMA – Campus São Luís, Monte Castelo. Email: luisfernandosoares@ifma.edu.br

Introdução

A análise estrutural é uma etapa primordial na elaboração de qualquer projeto de construção civil. Martha (2010) caracteriza a engenharia de estruturas como a responsável por planejar, projetar, construir e garantir a manutenção de sistemas estruturais destinados à área de transporte, residência, trabalho e lazer.

Uma vez que a aplicação de métodos numéricos em computadores se tornou possível, o seu emprego na análise estrutural se tornou comum e indispensável para os profissionais da área. Ademais, em conjunto com a evolução rápida dos computadores, cada vez mais algoritmos eficientes têm sido desenvolvidos para exprimir fielmente o comportamento da estrutura (Rigo, 1999). Nesse sentido, esse fato está diretamente relacionado com a criação de softwares capazes de otimizar a análise estrutural de um projeto. Entre os softwares existentes, para o contexto de grelhas, destacam-se o LESM 3.0 (2022), idealizado por Luiz Fernando Martha do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio; e o VG-Plan (2015), desenvolvido por Dorival Piedade Neto, Rodrigo Ribeiro Paccola, Marcio Roberto Silva Correa e Humberto Breves Coda, associados ao Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos.

Portanto, sob a ótica desta pesquisa, a motivação esteve centrada no estabelecimento e dos esforços internos e das variáveis nodais que estão distribuídos por toda a extensão de grelhas, de barras retas e curvas, a partir de equações diferenciais. Martha (2010) comenta que, no âmbito da construção civil, o pavimento de um edifício e o tabuleiro de uma ponte podem ser representados por modelos de grelhas. Dessa forma, os resultados foram comparados com os obtidos no LESM 3.0 e as expressões encontradas serão adicionadas no PAE-Grelhas. Em seguida, a versão atualizada estará disponível para a comunidade científica.

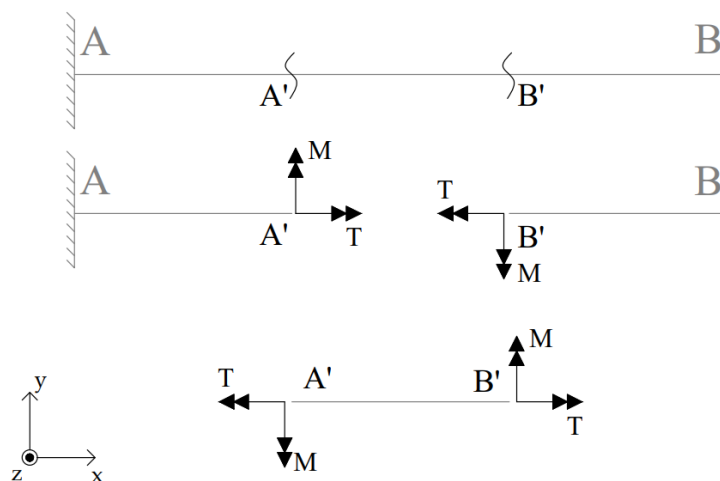
Metodologia

De início, foi feito um levantamento bibliográfico centrado nos conceitos da Análise Estrutural, sobretudo estruturas denominadas “grelhas”; nos conceitos matemáticos de Equações Diferenciais Ordinárias e nos fundamentos da linguagem Python. Nessa etapa, buscou-se entender as convenções de sinais utilizadas pelos autores analisados, de forma a estudar o seu impacto na determinação das equações diferenciais.

Seguidamente, a etapa de determinação das relações diferenciais começou. A partir do levantamento bibliográfico feito anteriormente, foi notado que há divergência nas convenções utilizadas pelos autores analisados, especialmente para a torção. Martha (2010) ressalta que a convenção de sinais para grelhas deve ser análoga à utilizada em pórticos planos, bem como a torção saindo da seção transversal no lado da porção isolada. Para Soriano (2013), a convenção de sinais do momento fletor e esforço cortante em grelhas é a mesma, embora para a torção seja oposta. Sussekind (1981) e Souza e Antunes (1995) expõe exemplos cujo sinal de momento fletor está omitido, enquanto suas convenções de torção divergem entre si.

Ao avaliar a relação entre os eixos de coordenadas globais e locais, adotou-se o sentido positivo da torção em conformidade com Martha (2010), mas contrariando o sentido adotado pelo autor para momento fletor. Ou seja, nessa convenção, esse esforço é considerado positivo quando traciona as fibras superiores da estrutura.

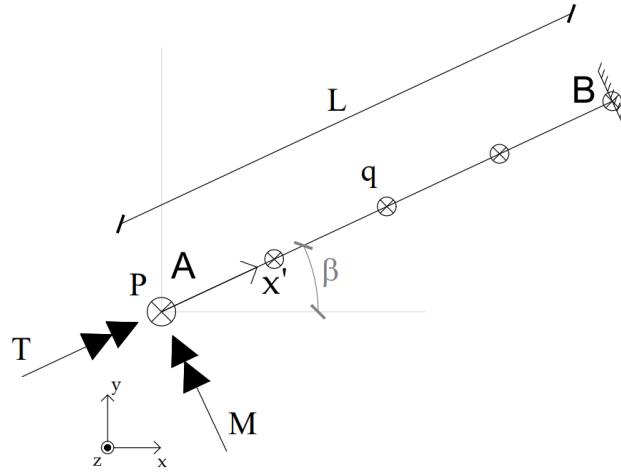
Figura 1: Sinais positivos para elementos de grelha em vista superior



- Barra reta:

Considera-se o elemento de eixo reto de uma grelha genérica, onde L é o comprimento da barra, β é o ângulo entre o eixo x (global) e x' (local), q uma carga uniformemente distribuída qualquer, P uma carga concentrada e M e T são cargas de momento fletor e torção, respectivamente.

Figura 2: Elemento genérico de grelha de eixo reto em vista superior



As equações dos esforços internos $M_{AB}(x')$ e $T_{AB}(x')$ são expressas de maneira genérica, respeitando a convenção adotada na Figura 1. Dessa forma, as rotações e deslocamento vertical no eixo global são calculados em função dessas duas parcelas, conforme as equações a seguir:

$$\frac{d(\theta_x(x'))}{dx'} = \left\{ \left[\frac{T_{AB}(x')}{G_c \cdot I_t} \cdot \cos(\beta) \right] + \left[-\frac{M_{AB}(x')}{E_c \cdot I_f} \cdot \sen(\beta) \right] \right\} \quad (1)$$

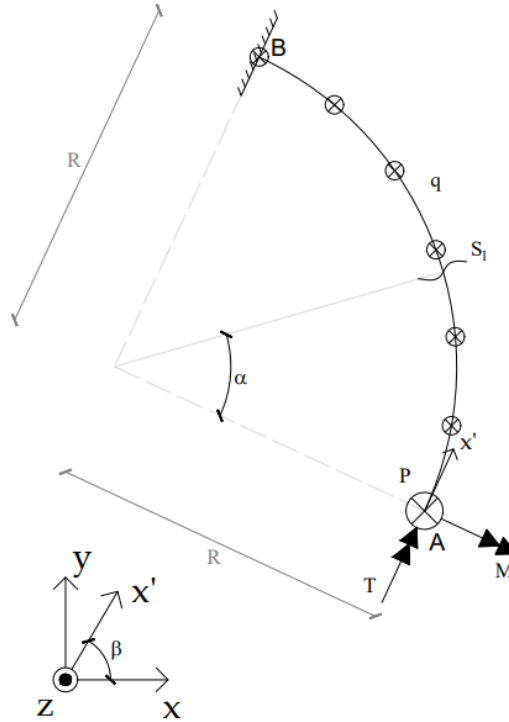
$$\frac{d(\theta_y(x'))}{dx'} = \left\{ \left[\frac{T_{AB}(x')}{G_c \cdot I_t} \cdot \sen(\beta) \right] + \left[\frac{M_{AB}(x')}{E_c \cdot I_f} \cdot \cos(\beta) \right] \right\} \quad (2)$$

$$\frac{d(v_z(x'))}{dx'} = \{ [\theta_x(x') \cdot \sen(\beta)] - [\theta_y(x') \cdot \cos(\beta)] \} \quad (3)$$

- Barras curvas

De forma análoga, considera-se o seguinte elemento genérico para barras de arco de circunferência em grelhas, onde β corresponde ao ângulo entre o eixo x (global) e o x' (local), que é tangente à curva, R é o raio da circunferência, α a variável angular avaliada no sentido anti-horário até uma seção genérica S_1 , q uma carga uniformemente distribuída qualquer, P uma carga concentrada, e M e T são cargas de momento fletor e torção, respectivamente.

Figura 3: Elemento genérico de eixo curvo em vista superior



As equações de esforços internos $M_{AB}(\alpha)$ e $T_{AB}(\alpha)$ também respeitam a convenção proposta na Figura 1, fundamental para a obtenção das equações a seguir:

$$\frac{d(\theta_x(\alpha))}{d\alpha} \cdot \frac{1}{R} = \left\{ \left[\frac{T_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] + \left[-\frac{M_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot \sin(\alpha + \beta) \right] \right\} \quad (4)$$

$$\frac{d(\theta_y(\alpha))}{d\alpha} \cdot \frac{1}{R} = \left\{ \left[\frac{T_{AB}(\alpha)}{G_c \cdot I_t} \cdot \sin(\alpha + \beta) \right] + \left[\frac{M_{AB}(\alpha)}{E_c \cdot I_f} \cdot \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \quad (5)$$

$$\frac{d(v_z(\alpha))}{d\alpha} = \{ [\theta_x(\alpha) \cdot \sin(\alpha + \beta)] - [\theta_y(\alpha) \cdot \cos(\alpha + \beta)] \} \quad (6)$$

- Equação genérica

Nessa etapa, o objetivo é utilizar das equações diferenciais apresentadas acima para elaborar uma equação genérica capaz de determinar o comportamento elástico do elemento em estudo. Essa equação considerou os elementos genéricos já expostos no presente relatório (ver Figura 2 e Figura 3). Desse modo, a utilização do arquivo de entrada e o de saída do PAE-Grelhas 2.0 é fundamental para fornecer os parâmetros necessários para determinação da linha elástica.

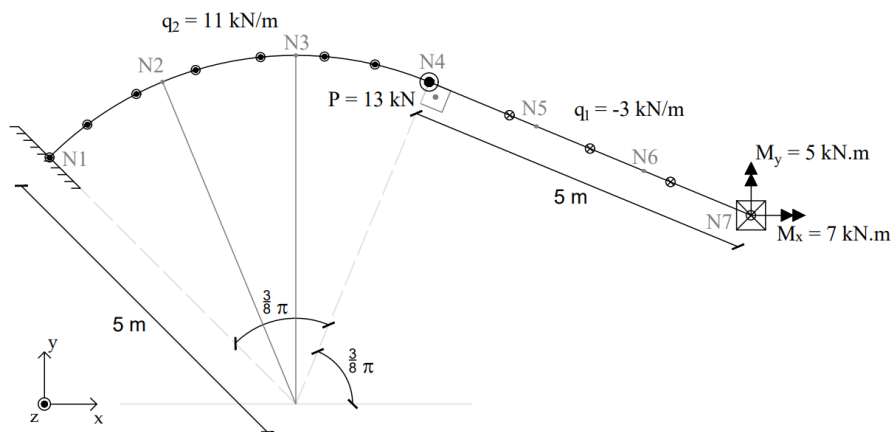
Referente às barras de eixo reto, a condição de contorno utilizada foi $\theta_x(0) = \theta_x i$, onde $\theta_x i$ representa a rotação inicial no eixo x (global); $\theta_y(0) = \theta_y i$, que corresponde à rotação inicial no eixo y (global); e $v_z(0) = v_z i$, sendo $v_z i$ o deslocamento vertical global. Além de fornecer os graus de liberdade iniciais, o PAE-Grelhas também vai fornecer os parâmetros q , L , E_c , G_c , I_f e I_t , que já foram citados, além de M_i (momento fletor inicial local), T_i (torção inicial local) e C_i (cortante inicial global). Devido ao tamanho, a expressão resultante não pode ser escrita no presente trabalho.

Analogamente aos elementos de eixo reto, as mesmas condições de contorno foram adotadas para grelhas com eixo em arco de circunferência. Além dos parâmetros descritos anteriormente, o arquivo de entrada do PAE-Grelhas 2.0 também define o valor de R . Devido ao grau de complexidade, a expressão resultante também não pode ser escrita no presente relatório.

Resultados e discussões

Esta seção é dedicada à comparação entre os resultados obtidos através das equações genéricas propostas e os resultados obtidos do LESM 3.0. É importante destacar que o LESM 3.0 não é capaz de resolver grelhas com barras em arco de circunferência, sendo necessário discretizar a estrutura em diversas barras retas para simular o comportamento de um arco. A estrutura analisada é demonstrada a seguir:

Figura 4: Estrutura utilizada para análise



A estrutura da Figura 4 será analisada conforme os parâmetros dos nós N1, N2, N3, N4, N5, N6 e N7. O modelo no LESM 3.0 conta com todos os nós anteriormente citados, mas com o acréscimo de muitos outros nós no elemento curvo devido à limitação da versão atual no quesito de arcos de circunferência, resultando em 27 elementos retos

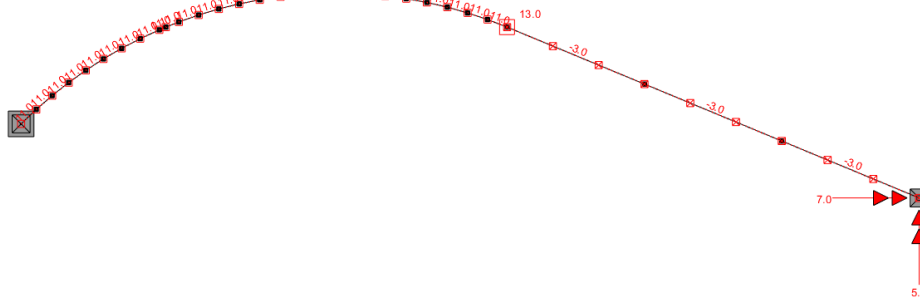
para simular o arco da estrutura. Já com o PAE-Grelhas 2.0, apenas os nós citados foram utilizados. Em contrapartida, a versão do PAE-Grelhas contendo a equação genérica, o PAE-Grelhas 3.0, necessita apenas dos nós N1, N4 e N7, uma vez que os restantes estão contidos no determinado elemento. Isso significa que, para o PAE-Grelhas 3.0, com os nós inicial e final, pode-se obter qualquer deslocamento ao longo do elemento, seja de eixo reto ou curvado. A Tabela 1 mostra as propriedades geométricas e materiais dos elementos.

Tabela 1: Propriedades geométricas e materiais das seções

| Propriedades de materiais | | Propriedades geométricas | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| E_c | G_c | I_f | I_t |
| $2.0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ | $1.0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ | $7.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ | $7.526 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$ |

A Figura 5 mostra a estrutura modelada no LESM 3.0.

Figura 5: Estrutura modelada no LESM 3.0 em vista superior



A Figura 6 mostra o arquivo de entrada do PAE-Grelhas 2.0.

Figura 6: Entrada de dados do PAE-Grelhas 2.0

```
***** ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS *****
***** PYGRELHAS 2.0 *****
*****
```

| N NOS & N ELEMENTOS DA ESTRUTURA EM ANALISE | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------------|----------------|--------------|------|-------|-------|--------------|--------------|--------|----------|-----|-----|
| 7 | 6 | | | | | | | | | | |
| NO | COORDENADA X | COORDENADA Y | Fz | Mx | My | VINCULACAO z | VINCULACAO x | GIRO y | | | |
| 1 | -5.449 | -1.084 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | -3.827 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 3 | -1.913 | -1.084 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 4 | 0.0 | 0.0 | 13.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 5 | 1.54 | -0.638 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 6 | 3.08 | -1.276 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 7 | 4.619 | -1.913 | 0.0 | 7.0 | 5.0 | 1 | 0 | 0 | | | |
| ELEMENT | NO INICIAL (i) | NO FINAL(j) | RAIO | A1fa1 | A1fa2 | E | If | G | It | Qzi | Qzj |
| 1 | 1 | 2 | 5 | -45 | -22.5 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | 11 | 11 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | -22.5 | 0 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | 11 | 11 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 22.5 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | 11 | 11 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 0 | 0 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | -3 | -3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | -3 | -3 |
| 6 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | -3 | -3 |

Ademais, a Figura 7 mostra o arquivo de entrada do PAE-Grelhas 3.0.

Figura 7: Arquivo de entrada de dados do PAE-Grelhas 3.0

```
*****
***** ARQUIVO DE ENTRADA DE DADOS *****
***** PYGRELHAS 3.0 *****
*****
```

| N NOS & N ELEMENTOS DA ESTRUTURA EM ANALISE | | | | | | | | | | | |
|------------------------------------------------|----------------|--------------|------|-------|-------|--------------|--------------|--------|----------|-----|-----|
| 3 | 2 | | | | | | | | | | |
| NO | COORDENADA X | COORDENADA Y | Fz | Mx | My | VINCULACAO z | VINCULACAO x | GIRO y | | | |
| 1 | -5.448951 | -1.083864 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 2 | 0.0 | 0.0 | 13.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 3 | 4.619398 | -1.913417 | 0.0 | 7.0 | 5.0 | 1 | 0 | 0 | | | |
| ELEMENT | NO INICIAL (i) | NO FINAL(j) | RAIO | A1fa1 | A1fa2 | E | If | G | It | Qz1 | Qzj |
| 1 | 1 | 2 | 5 | -45 | 22.5 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | 11 | 11 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 2.0e7 | 7.2e-3 | 1.0e7 | 7.526e-3 | -3 | -3 |

Finalmente, a Tabela 2 mostra os resultados encontrados para as 3 soluções descritas.

Tabela 2: Comparação dos resultados obtidos

| Nós | Coordenada x | Coordenada y | Deslocamento vertical | | | | |
|-----|--------------|--------------|-----------------------|----------|----------|-----------------|----------|
| | | | Equação genérica | LESM 3.0 | Erro (%) | PAE-Grelhas 2.0 | Erro (%) |
| 1 | -5.44895 m | -1.08386 m | 0.0 mm | 0.00 mm | 0.00 | 0.00 mm | 0.00 |
| 2 | -3.82683 m | 0.00 m | 1.429 | 1.4285 | 0.03 | 1.429 mm | 0.00 |
| 3 | -1.913417 m | 0.38061 m | 3.6799 | 3.6792 | 0.02 | 3.6799 | 0.00 |
| 4 | 0.00 m | 0.00 m | 4.2604 | 4.2596 | 0.02 | 4.2604 | 0.00 |
| 5 | 1.539799 m | -0.63781 m | 3.2664 | 3.2654 | 0.03 | 3.266 mm | 0.01 |
| 6 | 3.079598 m | -1.275611 m | 1.7596 | 1.7591 | 0.03 | 1.7594 | 0.01 |
| 7 | 4.619398 m | -1.913417 m | 0.00 mm | 0.00 mm | 0.00 | 0.00 mm | 0.00 |

Conclusão

Diante do exposto, o PAE-Grelhas 3.0 é capaz de determinar o comportamento linear-elástico de estruturas em grelha de forma confiável, além de requerer uma entrada de dados mais simples que a sua versão anterior. Isso se deve ao fato de que o programa necessita apenas dos parâmetros dos nós inicial e final de cada elemento para descrever a sua linha elástica. Desse modo, o programa auxilia o aprendizado dos usuários no âmbito da análise estrutural, bem como promove o desenvolvimento contínuo da pesquisa na área. Convém adicionar funcionalidades gráficas para trabalhos futuros envolvendo o PAE-Grelhas 3.0, com o intuito de melhor representar os resultados obtidos.

Agradecimentos

Agradeço ao IFMA e à FAPEMA pelo apoio técnico, desenvolvimento científico proporcionado e incentivo à pesquisa. Ademais, agradeço à Prof.^a Me. Fernanda Gabriella Batista Santos Oliveira e ao Prof. Me. Humberto Moura Lima pelo auxílio na compreensão dos conteúdos abordados e na escrita dos documentos que acompanharam o desenvolvimento da pesquisa.

Referências

- MARTHA, L. F.; RANGEL, R. L.; LOPES, P. C. **LESM - Linear Elements Structure Model**. Versão 3.0, 2022. Disponível em: <https://web.tecgraf.puc-rio.br/lesm/download.html>. Acesso em: 28 Agosto 2025.
- MARTHA, Luis Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- PIEIDADE NETO, D. et al. **VGPlan: A visual interface for GPlan**. Versão 0.1, 2015. Disponível em: <https://set.eesc.usp.br/software/vgplan/>. Acesso em: 28 Agosto 2025.
- RIGO, Eduardo. **Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas**. 1999. Tese de Doutorado. São Carlos, 1999.
- SORIANO, H. L. **Estática das Estruturas**. 3^a. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2013.
- SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Progressos gerais da hiperestática clássica**. São Carlos: Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Serviço Gráfico, 1995.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural: Estruturas isostáticas**. 6^a. ed. Porto Alegre - Rio de Janeiro: Globo, v. 1, 1981.