

# OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE RESSONADORES 3D PARA EXPANSÃO DE ZONAS DE ATENUAÇÃO EM METAESTRUTURAS

Marvin Barros de Miranda Sales<sup>1</sup>; Mateus Calixto Pereira dos Santos<sup>2</sup>; Cássio Bruno Florêncio Gomes<sup>3</sup>; Igor Farias Chagas<sup>4</sup>; Flávio Nunes Pereira<sup>5</sup>; Edson Jansen Pedrosa de Miranda Jr.<sup>6</sup>

**Resumo:** A faixa de frequência de operação de ressonadores 3D só pôde ser prevista numericamente, em razão da complexidade das equações diferenciais envolvidas, decorrente da distribuição de massa e rigidez ao longo dos diferentes eixos. A influência de diferentes geometrias de ressonadores 3D no comportamento dinâmico de metaestruturas, *i.e.*, materiais avançados que podem ser projetados para manipular a propagação de ondas, permanece pouco explorada na literatura. Nesse cenário, o objetivo deste estudo foi otimizar a distribuição de massa da geometria de ressonadores 3D na formação de zonas de atenuação em metaestruturas. A investigação utilizou o método dos elementos finitos (FEM) e a abordagem de supercélula para identificar zonas de atenuação via estrutura de bandas, considerando a influência das ondas transversais pelo fator de polarização e comparando com as funções de resposta em frequência (FRF). Na análise modal, o modelo piramidal apresentou frequências naturais inferiores ao prismático. As estruturas de bandas com o fator de polarização permitiram identificar zonas de atenuação flexurais próximas às frequências naturais. O modelo prismático apresentou frequência média de operação de 839,45 Hz, enquanto o piramidal apresentou 475,19 Hz, mostrando que a redistribuição de massa reduz a frequência média, ainda que com menor largura de banda. As análises via FRF confirmaram a existência de zonas de atenuação em placas finitas, com larguras menores que as previstas no modelo infinito. Por fim, a abordagem de supercélula aumentou a largura de banda e, simultaneamente, reduziu a frequência de midgap, rompendo a relação de compromisso do modelo de geometria única.

**Palavras-chave:** Controle de vibrações de flexão. Propagação de ondas transversais. Zonas de atenuação. Ressonadores 3D. Supercélula.

**Financiamento:** Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-graduação e Inovação - PRPGI/IFMA.

---

Estudante do Curso de Engenharia de Materiais do IFMA Campus Monte Castelo; E-mail: [marvinsales@ifma.acad.edu.br](mailto:marvinsales@ifma.acad.edu.br). Professor do Curso de Física Aplicada da UFTM do Campus Uberaba; E-mail: [mateuscalixtopereira@gmail.com](mailto:mateuscalixtopereira@gmail.com). Estudante do Curso de Mecânica de Materiais do UT/e do Países Baixos; E-mail: [cassio.bruno.fg@gmail.com](mailto:cassio.bruno.fg@gmail.com). Estudante do Curso de Engenharia Mecânica Industrial do IFMA do Campus Monte Castelo; E-mail: [igor.farias.ifc98@gmail.com](mailto:igor.farias.ifc98@gmail.com). Professor do Curso de Engenharia Mecânica da UEMA do Campus São Luis; E-mail: [flaviomecn@gmail.com](mailto:flaviomecn@gmail.com). Professor do Curso de Ciência e Tecnologia de Materiais do Campus Monte Castelo; E-mail: [edson.jansen@ifma.edu.br](mailto:edson.jansen@ifma.edu.br).

## INTRODUÇÃO

Placas submetidas a vibrações mecânicas estão presentes em inúmeras aplicações de engenharia, desde componentes estruturais de veículos até elementos de máquinas e sistemas de transporte. Essas vibrações podem comprometer a durabilidade, a eficiência e a segurança dos mecanismos, favorecendo falhas por fadiga e exigindo manutenção frequente (Leissa, 1973). Embora as placas sejam projetadas para suportar esforços mecânicos, seu comportamento dinâmico permanece um desafio, sobretudo em baixas frequências (Touratier, 1991; Vel e Batra, 2004). Materiais e técnicas convencionais oferecem recursos limitados para atenuação, tornando necessária a busca por soluções inovadoras e mais eficientes para o controle vibracional.

Metaestruturas vêm sendo exploradas como alternativa promissora para manipular a propagação de ondas mecânicas em placas e outros elementos estruturais (Zhu *et al.*, 2012). Sua principal característica é a capacidade de formar bandas proibidas, *i.e.*, regiões de frequência onde as ondas são bloqueadas ou severamente reduzidas (Liu *et al.* 2000). Dois mecanismos são predominantes: o espalhamento de Bragg, dependente do tamanho da célula unitária e mais aplicável em altas frequências; e a ressonância local, que utiliza elementos ressonantes para gerar bandas proibidas em baixas frequências, independentemente da periodicidade ou do tamanho da célula unitária (Maldovan, 2013). Dentre eles, a ressonância local destaca-se por ser mais adequada a aplicações práticas em que restrições geométricas impedem a adoção de grandes células unitárias.

Aplicações de ressonadores em metaestruturas têm obtido resultados expressivos em isolamento, barreiras e supressão de vibrações (Dal Poggetto *et al.*, 2022). No entanto, a maior parte dessas investigações se concentra em geometrias bidimensionais ou em modelos massa-mola simplificados, que embora conceitualmente consistentes, não representam integralmente o comportamento real das estruturas (He e Huang, 2018). Essa limitação restringe a previsão precisa de respostas dinâmicas e compromete a otimização de projetos. Ressonadores 3D oferecem uma representação mais fiel da distribuição de massa e rigidez dos sistemas reais e, portanto, maior potencial para ajuste fino das propriedades dinâmicas (Krushynska *et al.*, 2017).

Contudo, a introdução de graus de liberdade adicionais e de geometrias complexas eleva a dificuldade do cálculo das frequências naturais e da previsão dos efeitos de dispersão. A influência da distribuição geométrica de massa sobre a rigidez efetiva de ressonadores 3D, voltada à otimização das zonas de atenuação em placas finas,

permanece pouco explorada na literatura. Esta lacuna dificulta a identificação de parâmetros geométricos capazes de maximizar o desempenho vibracional das metaestruturas. Neste cenário, este trabalho investigou a geometria de ressonadores 3D com o objetivo de otimizar as zonas de atenuação em metaestruturas. A massa, a densidade e o volume dos ressonadores foram mantidos constantes, variando-se apenas a rigidez efetiva por meio de alterações geométricas. A análise foi conduzida pelo método dos elementos finitos (MEF) para a obtenção da estrutura de bandas. O fator de polarização foi aplicado para identificar zonas de atenuação associadas à propagação de ondas de flexão, e comparadas por meio das vibrações das funções de resposta em frequência (FRF), permitindo uma caracterização detalhada do comportamento dinâmico.

## METODOLOGIA

Neste trabalho, considerou-se uma metaestrutura de placa fina com ressonadores prismáticos 3D acoplados. O MEF foi empregado para a realização das simulações, utilizando o módulo de mecânica dos sólidos do software COMSOL Multiphysics. A Figura 1 apresenta o esquema da célula unitária da estrutura, composta pela placa fina (p), mola (k) e ressonador (m). Os parâmetros  $h_p = 2,8$  mm,  $h_k = 2,0$  mm e  $h_m = 3,8$  mm correspondem às alturas da célula, da mola e da massa do ressonador, respectivamente, enquanto  $a_p = 12$  mm,  $a_k = 1$  mm e  $a_m = 6$  mm indicam suas larguras. A metaestrutura foi modelada em material polimérico isotrópico, comumente empregado em impressão 3D e comercialmente denominado Vero White Plus, cujas propriedades e dimensões da célula estão detalhadas na Tabela 1.

A propagação de ondas é analisada em um meio sólido, repetido infinitamente no plano  $xy$  e livre de defeitos de contorno. Para isso, as estruturas de bandas são obtidas considerando um meio periódico infinito, em que o vetor de deslocamento é descrito pelo teorema de Floquet-Bloch como:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição,  $t$  representa o tempo, e  $\mathbf{U} \equiv (u, v, w)$ , sendo  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  e  $w(x, y, z)$  os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Na configuração infinita, células unitárias adjacentes são espaçadas por  $a_p$  entre si no plano  $xy$ , formando uma rede quadrada. Logo, o vetor de onda de Bloch segue a periodicidade bidimensional e é expresso em termos de seus componentes  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , enquanto  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$  é uma função

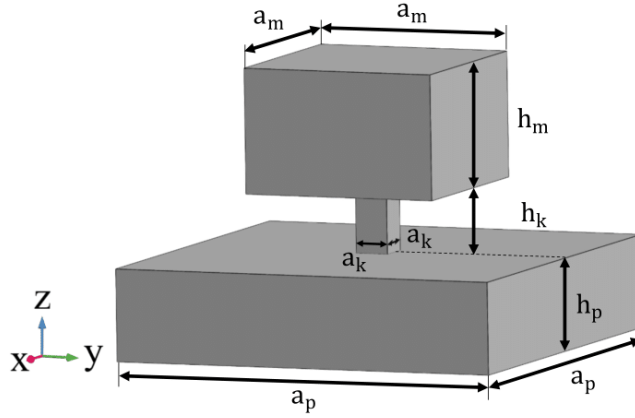


Figura 1 – Dimensões da célula unitária da metaestrutura em vista isométrica, destacando o parâmetro de rede –  $a_p$ , a altura da célula unitária –  $h_p$ , a largura –  $a_k$  e a altura –  $h_k$  da mola, bem como a largura –  $a_m$  e a altura –  $h_m$  da massa do ressonador.

Tabela 1 – Propriedades e valores do polímero Vero White Plus e da célula unitária (Miranda Jr. *et al.*, 2019)

Propriedades	Valores
Densidade ( $\rho$ )	600,00 [kg/m <sup>3</sup> ]
Módulo de Young ( $E$ )	0,86 [GPa]
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,39
Parâmetro de rede ( $a_p$ )	12,00 [mm]
Volume da placa ( $V_p = a_p^2 \cdot h_p$ )	403,20 [mm <sup>3</sup> ]
Volume da mola ( $V_k = a_k^2 \cdot h_k$ )	2,00 [mm <sup>3</sup> ]
Volume da massa ( $V_m = a_m^2 \cdot h_m$ )	136,80 [mm <sup>3</sup> ]

periódica com a mesma periodicidade da rede. O diagrama de dispersão,  $\omega(\mathbf{k})$ , é analisado dentro da primeira zona irredutível de Brillouin (PZIB), conforme ilustrado na Figura 2.

As análises do comportamento dinâmico da propagação de ondas na estrutura de bandas são influenciadas pelos deslocamentos em todas as direções. Neste estudo, a atenção está voltada para ondas e vibrações de flexão, cujo deslocamento ocorre na direção do eixo  $z$ . Para considerar a contribuição dos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  sobre a energia dos modos permitidos das formas dos modos de onda, utiliza-se o fator de polarização (Yang e Jo, 2024),

$$f(k) = \frac{\int V |\mathbf{P}|^2 dV}{\int V (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2) dV}, \quad (2)$$

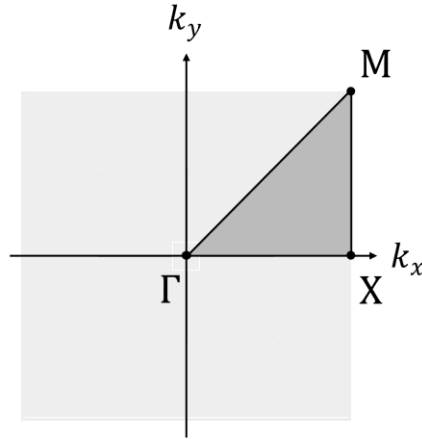


Figura 2 – PZIB destacado pelo triângulo cinza limitado por  $\Gamma (0, 0)$ ,  $X (\pi/a_p, 0)$ , e  $M (\pi/a_p, \pi/a_p)$  em uma rede quadrada.

definido para cada valor de frequência, em que  $\mathbf{V}$  é o volume da célula unitária e  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  representam a polarização nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Assim, ao considerar o fator de polarização na direção  $z$  para um conjunto completo de modos dentro de uma faixa de frequências, é possível identificar regiões de banda proibida associadas a modos de flexão.

Entre as diferentes geometrias avaliadas para a massa do ressonador, a configuração em forma de pirâmide invertida foi selecionada por apresentar o maior desempenho. Para essa escolha, mantiveram-se constantes o volume, a massa e a densidade em relação ao modelo prismático inicial, alterando-se apenas as dimensões  $a_m$  e  $a_h$ , ambas iguais a 6,701 mm, com a base definida idêntica a largura da mola ( $1 \times 1$  mm), resultando em um volume total de 136,799 mm<sup>3</sup>. Para analisar a atenuação de vibração, também foram obtidas as FRF dos modelos de metaestrutura finita, compostos por 80 células unitárias ( $8 \times 10$ ) sob condições de contorno livre-livre. Para as FRF, que representam a resposta do sistema a uma força aplicada, considera-se a receptância:

$$FRF_{Rec} = 20 \log_{10} \left( \frac{D}{F} \right), \quad (3)$$

em dB, definida como a razão entre a resposta em deslocamento do sistema ( $D$ ) e a força unitária ( $F$ ) aplicada na transversal.

Por fim, aplicou-se a abordagem de supercélula, variando aritmeticamente os parâmetros geométricos da configuração otimizada. O parâmetro  $h_m$  foi modificado de 6,701 para 7,701, 8,701 e 9,701 mm, ajustando-se a largura da massa do ressonador de modo a manter constante o volume total. A simulação considerou malhas compostas por

elementos tetraédricos, totalizando 10.586, 14.400 e 77.400 elementos para os modelos do ressonador, da célula unitária e da placa, respectivamente. Realizou-se a análise modal dos ressonadores, obtiveram-se as estruturas de bandas com fator de polarização da célula unitária, e a FRF da placa.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, são apresentados os resultados das simulações numéricas. Inicialmente, realizou-se uma análise modal, cujos resultados para os modelos de ressonadores prismático e piramidal são apresentados na Figura 3. As frequências naturais do modelo prismático para os três primeiros modos de vibrar foram 930,91, 931,14 e 1070,50 Hz, respectivamente, enquanto para o modelo piramidal foram 521,12, 521,43 e 1072,40 Hz. As formas dos modos de vibrar indicam que os ressonadores estão associados a modos de flexão nos dois primeiros modos e a um modo de torção no terceiro, independentemente da geometria adotada, *i.e.*, da distribuição de massa. O modelo piramidal atinge frequências inferiores em comparação ao modelo prismático, exceto no terceiro modo, em que os valores são muito próximos (1070,50 e 1072,40 Hz).

Após a análise modal, os ressonadores foram acoplados às placas finas, conforme

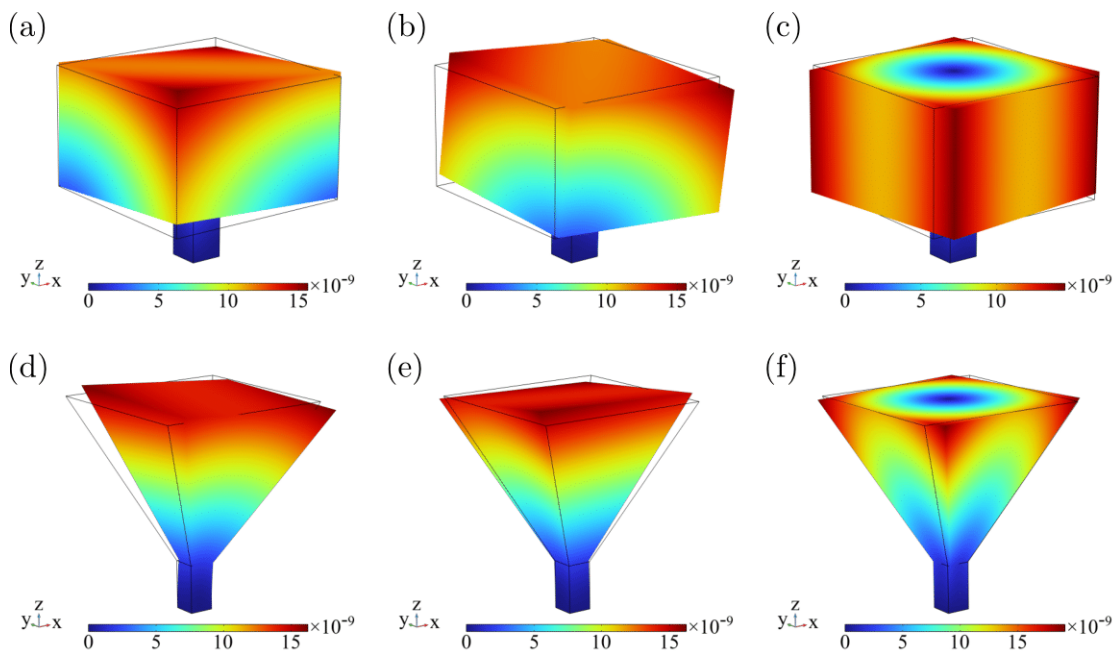


Figura 3 – Forma dos modos de vibrar dos ressonadores engastado-livre, engastada na base inferior da mola, para o modelo prismático (a)  $f_1 = 930,91$ , (b)  $f_2 = 931,14$  e (c)  $f_3 = 1070,50$  Hz, e piramidal (d)  $f_1 = 521,12$ , (e)  $f_2 = 521,43$  e (f)  $f_3 = 1072,40$  Hz.

ilustrado na Figura 1, e aplicaram-se as condições periódicas de contorno de Floquet-Bloch para a obtenção da estrutura de bandas. A Figura 4 apresenta o fator de polarização na estrutura de bandas, utilizando uma escala de cores que varia do azul ao vermelho (0 a 1) para indicar a contribuição do deslocamento da célula na direção  $z$ . Embora nenhuma banda proibida completa seja exibida, o fator de polarização auxilia na identificação de bandas proibidas de flexão, indicadas pelas curvas de dispersão em azul e evidenciadas por uma lacuna que caracteriza a zona de atenuação. Os modos localizados, *i.e.*, aqueles caracterizados por velocidade de grupo nula e curvas totalmente horizontais, surgem próximos às frequências naturais dos ressonadores.

A Figura 4a apresenta as curvas de dispersão do modelo prismático, que exibiu uma zona de atenuação entre 777,40 e 901,50 Hz, com largura de 124,10 Hz e frequência média de operação de 839,45 Hz. Por sua vez, a Figura 4b apresenta o modelo piramidal, que exibiu uma zona de atenuação entre 423,08 e 527,30 Hz, com largura de 104,22 Hz e frequência média de operação de 475,19 Hz. Os resultados corroboram com a análise modal, uma vez que as zonas de atenuação operam próximas às frequências naturais dos respectivos ressonadores, o que é evidenciado pelos modos localizados de torção em torno de 1000 Hz. Com base nisso, é possível demonstrar que, para o modelo piramidal, a

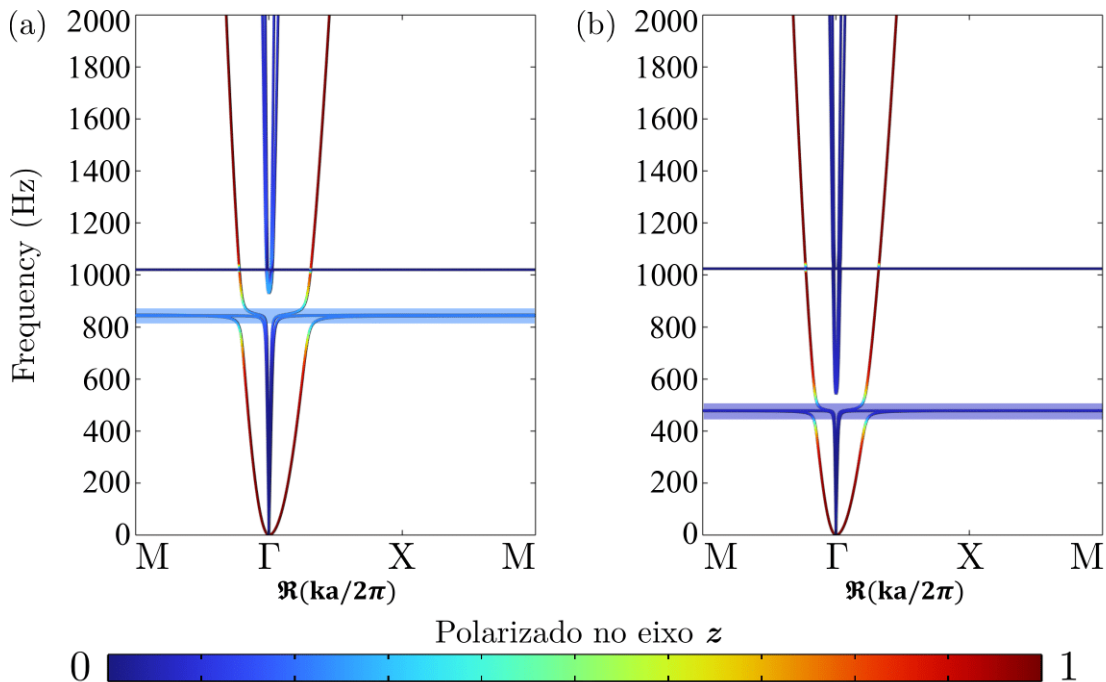


Figura 4 – Estrutura de bandas com fator de polarização no eixo  $z$ , indicando baixa (azul) e alta (vermelho) contribuição do deslocamento para os modelos: (a) prismático e (b) piramidal.

distribuição de massa promove uma otimização com a redução da frequência média de operação, porém com perda de largura de banda, respeitando a relação de compromisso.

Também foi possível observar que o modelo piramidal (Figura 4b) apresenta a zona de atenuação em uma escala de azul mais escura, *i.e.*, mais próxima de 0, do que a verificada no modelo prismático (Figura 4a). A Figura 5 apresenta a FRF para ambos os modelos, indicando comportamento semelhante das estruturas fora das regiões de atenuação, evidenciado pelos “ruídos” com deslocamento da placa igual a zero. Esse resultado comprova a existência da zona de atenuação, porém com larguras significativamente inferiores às previstas pela metodologia de placas infinitas via estrutura de bandas. O modelo prismático apresentou zona de atenuação entre 858,06 e 889,43 Hz, com largura de 31,37 Hz e frequência média de 873,75 Hz, enquanto o modelo piramidal apresentou atenuação entre 490,47 e 501,22 Hz, com largura de 10,75 Hz e frequência média de 495,85 Hz.

Devido a distribuição de massa concentrada na face superior da massa do ressonador, foi configurada uma supercélula piramidal  $2 \times 2$  variando o parâmetro  $h_m$  de 6,701 para 7,701, 8,701 e 9,701 mm, ajustando-se a largura da massa do ressonador de modo a manter constante o volume total. Para comparação, foi composta uma supercélula piramidal  $2 \times 2$  com quatro células de  $h_m = 6,701$  mm. Para a supercélula com ressonadores de mesmo  $h_m$ , o modelo apresentou largura de banda de 111,62 Hz e frequência de midgap de 492,31 Hz, valores próximos aos obtidos anteriormente para a célula unitária. No segundo caso, com a variação de  $h_m$  e volume total dos ressonadores constante,

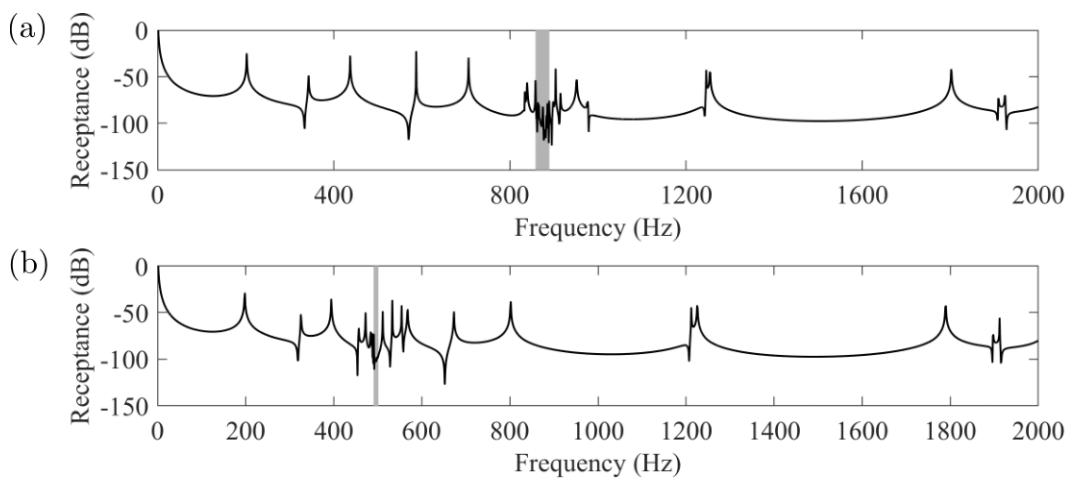


Figura 5 – FRF da metaestrutura de placas finas ( $8 \times 10$ ) na condição livre-livre com ressonadores 3D acoplados nos modelos (a) prismático e (b) piramidal.

atingiu uma largura de banda de 139,20 Hz e uma frequência de midgap de 370,20 Hz. Com isso, apresentou uma otimização simultânea, com aumento de 24,71% na largura de banda e redução de 24,80% na frequência de midgap, rompendo a relação de compromisso observada no modelo de geometria única. Ajustes geométricos na supercélula permitiram reduzir a frequência de operação e ampliar zonas de atenuação sem alterar a massa total ou elevar custos, superando limitações dos modelos iniciais.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste trabalho, investigou-se o comportamento dinâmico de metaestruturas de placas finas com ressonadores 3D acoplados, por meio do MEF. Na análise modal, verificou-se que o modelo piramidal apresentou frequências naturais inferiores em relação ao prismático. Em seguida, foram obtidas as estruturas de bandas com o fator de polarização, permitindo identificar zonas de atenuação flexurais, próximas às frequências naturais dos ressonadores. O modelo prismático apresentou frequência média de operação de 839,45 Hz, enquanto o piramidal apresentou 475,19 Hz, confirmando que a redistribuição de massa promove a redução da frequência média de operação, ainda que com menor largura de banda.

As análises via FRF confirmaram a existência de zonas de atenuação em placas finitas, embora com larguras reduzidas em relação ao modelo de placas infinitas. O modelo prismático apresentou atenuação de 31,37 Hz em torno de 873,75 Hz, enquanto o piramidal apresentou 10,75 Hz em torno de 495,85 Hz. Por fim, a abordagem de supercélula evidenciou ganhos expressivos: a variação da altura do ressonador de mesmo volume, resultou em largura de banda de 139,20 Hz e frequência de midgap de 370,20 Hz, representando aumento de 24,71% e redução de 24,80%, respectivamente, rompendo a relação de compromisso observada no modelo de geometria única.

## **AGRADECIMENTOS**

Os autores agradecem ao Instituto Federal do Maranhão (IFMA), ao Instituto Tecnológico Vale (ITV) e às agências de fomento brasileiras CAPES (Número de Referência de Bolsa 88887.959941/2024-00), CNPq (Números de Referência de Bolsa 403234/2021-2, 405638/2022-1, 350929/2023-8 e 404417/2024-8), FAPEMA, FAPESP (Número de Referência de Bolsa 2018/15894-0) e FADESP.

## REFERÊNCIAS

DAL POGGETTO, V. F.; MIRANDA JR., E. J. P.; DOS SANTOS, J. M. C.; PUGNO, N. M. Wave attenuation in viscoelastic hierarchical plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 236, 2022. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107763

HE, J.-H.; HUANG, H.-H. Complete vibrational bandgap in thin elastic metamaterial plates with periodically slot-embedded local resonators. *Archive of Applied Mechanics*, v. 88, p. 1263–1274, 2018. doi: 10.1007/s00419-018-1371-0

KRUSHYNSKA, A. O.; MINIACI, M.; KOUZNETSOVA, V. G.; GEERS, M. G. D. Multi-layered inclusions in locally resonant metamaterials: Two-dimensional versus three-dimensional modeling. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 139, n. 2, 024501, 2017. doi: 10.1115/1.4035307

LEISSA, A. W. The free vibration of rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 31, n. 3, p. 257-293, 1973. doi: 10.1016/S0022-460X(73)80371-2

LIU, Z.; ZHANG, X.; MAO, Y.; ZHU, Y. Y.; YANG, Z.; CHAN, C. T.; SHENG, P. Locally resonant sonic materials. *Science*, v. 289, p. 1734–1736, 2000. doi: 10.1126/science.289.5485.1734

MALDOVAN, M. Sound and heat revolutions in phononics. *Nature*, v. 503, p. 209–217, 2013. doi: 10.1038/nature12608

MIRANDA JR., E. J. P.; NÓBREGA, E. D.; FERREIRA, A. H. R.; DOS SANTOS, J. M. C. Flexural wave band gaps in a multi-resonator elastic metamaterial plate using Kirchhoff-Love theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 116, 2019. doi: 10.1016/j.ymssp.2018.06.059

TOURATIER, M. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, v. 29, n. 8, p. 901-916, 1991. doi: 10.1016/0020-7225(91)90165-Y

VEL, S. S.; BATRA, R. C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, v. 272, n. 3, p. 703–730, 2004. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00412-7

YANG, J.; JO, S.-H. Experimental validation for mechanically tunable defect bands of a reconfigurable phononic crystal with permanent magnets. *Crystals*, v. 14, n. 8, 2024. doi: 10.3390/cryst14080701

ZHU, R.; LIU, X. N.; HUANG, G. L.; HUANG, H. H.; SUN, C. T. Microstructural design and experimental validation of elastic metamaterial plates with anisotropic mass density. *Physical Review B*, v. 86, 144307, 2012. doi: 10.1103/PhysRevB.86.144307