

SIMETRIAS DE LIE COMO UM MÉTODO PARA A ANÁLISE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ODS (9)

Thaís Bueno de Oliveira (Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *Campus Campos do Jordão*)

Ligia Corrêa de Souza (Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo, *Campus Campos do Jordão*)

Introdução

As equações diferenciais parciais (EDPs) são um dos principais instrumentos matemáticos na modelagem de fenômenos em diferentes campos da ciência – física, biologia, engenharia, e outros. Elas aparecem em contextos fictícios, muito frequentemente considerados em manuais de graduação, mas também têm diversas aplicações em questões práticas que surgem em decisões reais e precisam de um embasamento matemático (BASSANEZI, 2012; STEWART, 2013; ZILL, 2016). A dificuldade dessas equações é grande porque, em muitos casos, não é possível encontrar uma solução exata. Sendo assim, utilizamos tanto os métodos qualitativos quanto numéricos. Portanto, neste contexto, é necessário desenvolver e aplicar métodos para resolução das equações diferenciais.

Alguns métodos numéricos tradicionais fornecem aproximações ou análises incompletas do problema, no entanto, a Teoria de Lie, desenvolvida no final do século XIX por Sophus Lie, deu origem aos métodos de simetria aplicados a equações diferenciais, que fornecem um procedimento sistemático tanto para a compreensão qualitativa de propriedades das equações quanto soluções exatas (BLUMAN; ANCO, 2002).

Além disso, ao identificar simetrias, diminui-se a ordem de uma equação, ou até a converte-se em uma mais simples, o que possibilita a obtenção de soluções invariantes (CANTWELL, 2002).

Este estudo, fundamentado em uma Iniciação Científica apoiada pela Programa de Apoio à Ciência e Tecnologia (PACTec) do Instituto Federal de São Paulo e intitulada Grupos de transformações e equações diferenciais, contribui para a investigação do potencial das simetrias de Lie. Aqui, ao tratar das técnicas de prolongamento e de derivação total de base utilizada a uma EDP não linear, procuramos ver como esses podem simplificar problemas, mas ainda mais, como podem reforçar a conexão entre a teoria matemática e suas aplicações. Tal abordagem pode ser alinhada ao Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 9, ao incentivar a inovação no campo da matemática aplicada e oferecer suporte conceitual e metodológico a várias áreas científicas e tecnológicas.

Revisão da literatura

O material sobre o estudo das equações diferenciais é muito difundido na literatura, em particular, livros nos quais são descritas várias maneiras de resolvê-las. Por exemplo, Nagle, Saff e Snider (2012) e Zill (2016) apresentam métodos analíticos para encontrar soluções, enquanto outras obras como Stewart (2013) incluem métodos qualitativos e numéricos para entender propriedades gerais ou encontrar soluções aproximadas, principalmente quando não é possível encontrar soluções exatas.

Assim, a formalização das simetrias de Lie idealmente concluída nesses trabalhos de referência, especialmente por Olver (1986), Hydon (2000) e Cantwell (2002), introduziu conceitos como grupos de transformações e geradores infinitesimais. Com base nesses novos conceitos, foi obtido um instrumento que permite reduzir a ordem de equações diferenciais, desenvolver soluções invariantes e simplificar problemas extremamente complexos.

No entanto, aplicações mais recentes e inovadoras foram desenvolvidas em Bortoli Junior (2021) e Souza (2023), ambos identificando simetrias de Lie em equações diferenciais parciais que podem ser utilizadas para modelar crescimento das células tumorais. Dessa forma, pode-se concluir que este é um método aplicável e valioso como ferramenta de análise em contextos científicos e tecnológicos.

Método

O trabalho começou com a análise da equação diferencial parcial

$$u_t - u_{txx} + \lambda(u - u_{xx}) = uu_{xxx} + 2u_x u_{xx} - 3u^2 u_x = u(t, x),$$

por meio do desenvolvimento dos geradores infinitesimais e seus prolongamentos, manualmente, a fim de compreender o passo a passo da teoria de Lie para as equações diferenciais. Assim, consideraram-se trabalhos como Sales Filho (2021) e Souza (2023), obras respectivamente teórica e prática.

Com a familiaridade em como se proceder com o método em mãos, realiza-se o passo seguinte: a utilização do *software* Wolfram Mathematica/WolframAlpha a fim de tornar a construção do sistema de equações determinantes mais ágil. Desta maneira, deseja-se analisar não somente a equação proposta, mas também casos trabalhados por Souza (2023) em que não se tem soluções exatas e aproximações conhecidas para algumas equações, e verificar se a abordagem de simetrias de Lie pode fornecer resultados novos.

Resultados ou Resultados Esperados

Portanto, ao final da pesquisa, consolidaremos a compreensão teórica e prática dos métodos de simetrias de Lie aplicados a equações diferenciais parciais, obtendo os geradores infinitesimais necessários, seus prolongamentos e, sempre que possível, soluções invariantes da equação estudada. Também aplicaremos a metodologia a outras equações apresentadas em Souza (2023). Além disso, pretendemos, assim, determinar se esta abordagem permite obter resultados não triviais em situações que ainda não foram resolvidas anteriormente. Todas as inovações e outras soluções obtidas durante esta pesquisa serão preparadas para publicação em eventos científicos.

Conclusões ou Considerações finais

O desenvolvimento desta pesquisa evidenciou a capacidade da Teoria de Lie em ser aplicada como um método sistemático para tratar de equações diferenciais parciais, no sentido de conseguir reunir os conceitos relacionados aos geradores infinitesimais, prolongamentos e soluções invariantes de maneira integrada.

Referências

BASSANEZI, R. C. **Temas & Modelos**. Santo André: UFABC, 2012.

BORTULI JUNIOR, A. **Tratamento matemático de modelos de tumores sólidos localizados via simetrias de Lie**. 2021. 95 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2021. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=122124. Acesso em: 17 nov. 2024.

BLUMAN, G. W.; ANCO, S. C. **Symmetry and Integration Methods for Differential Equations**. New York: Springer, 2002. (Applied Mathematical Sciences 154)

CANTWELL, B. J. **Introduction to symmetry analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

HYDON, P. E. **Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge texts in applied mathematics)

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. **Equações Diferenciais**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. New York: Springer, 1986. v. 107. (Graduate Texts in Mathematics)

SALES FILHO, N. **Simetrias e leis de conservação de equações de Novikov**. 2021. 95 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2021. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=122124. Acesso em: 29 set. 2025.

SOUZA, L. C. de. **Study of tumours via lie symmetries**. 2023. 139 f. Tese (doutorado) - Universidade Federal do ABC, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Santo André, 2023. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=126223. Acesso em: 29 set. 2025.

STEWART, J. **Cálculo**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.