

RECORRÊNCIA DE SEQUÊNCIAS MATEMÁTICAS: ANÁLISE DE PADRÕES, CONJECTURAS E VALIDAÇÕES.

¹ Haryel Hernandes de Oliveira Carvalho; ²Irailson dos Santos Fernandes; ³Antônio Edmilson Oliveira Vieira Neto; ⁴Pablo Silva Império.

Resumo

Este projeto de pesquisa visa investigar problemas matemáticos que envolvam recorrências de primeira e segunda ordem aplicáveis no âmbito do ensino básico. A priori, este tema se encontra dentro do contexto de sequências matemáticas, isto é, no campo de funções de \mathbb{N} em \mathbb{R} . Por meio da análise de padrões, relações, conjecturas e consequentemente validações destas, por meio de demonstrações (Princípio de Indução Finita), pretende-se proporcionar uma compreensão mais profunda do processo de investigação de padrões, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da habilidade de resolver problemas matemáticos. A pesquisa utilizará abordagens teóricas e práticas com o intuito de enriquecer a experiência de aprendizado. Com ênfase em atividades interativas, por meio de ferramentas digitais (*GeoGebra*, *Python*, planilhas eletrônicas, etc.), busca-se incentivar a aplicação prática dos conceitos abordados promovendo maior engajamento dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem de recorrências de sequências matemáticas. Assim, como no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo.

Palavras-chave: Recorrências; Conjecturas; Demonstrações.

Financiamento

Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão - FAPEMA.

¹ Estudante do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do IFMA Campus Coelho Neto. E-mail: hernandes.haryel@acad.ifma.edu.br.

² Estudante do Curso Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFMA Campus Coelho Neto. E-mail: irailson.f@acad.ifma.edu.br.

³ Estudante do Curso Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio do IFMA Campus Coelho Neto. E-mail: edmilsonn@acad.ifma.edu.br.

⁴ Orientador: Prof. Me / IFMA Campus Coelho Neto. E-mail: pablo.imperio@ifma.edu.br.

Introdução

Quando obtemos um resultado por meio de observações, cabem algumas perguntas: será que tal resultado é sempre verdade? Será que vale para todos os casos ou apenas alguns? Como fazer sua validação? No contexto das sequências matemáticas, que são funções de domínio em \mathbb{N} (conjunto dos números naturais) e contradomínio em \mathbb{R} (conjunto dos números reais), vemos que há vários resultados importantes que são conjecturados por meio de uma lei de formação, que nada mais é do que uma fórmula que gera seus termos em função de outros termos anteriores. Um bom exemplo é o da sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, que possui a seguinte lei de formação dos seus termos $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ onde $x_1 = x_2 = 1$.

Lançando mão do Princípio de Indução Finita para validação da conjectura e de afirmações (Teoremas) para se chegar à solução de uma recorrência, temos não somente a sua veracidade, como também a solução do problema. As recorrências de sequências matemáticas são temas intrigantes que proporcionam uma oportunidade única para explorar padrões e relações matemáticas de maneira intuitiva.

A proposta deste trabalho visa realizar estudo teórico de recorrências lineares de primeira e segunda ordens, que são fórmulas que geram os termos de uma sequência em função do(s) termo(s) anterior(es), realizando conjecturas das mesmas, validação desta por meio do Princípio da Indução Finita e sua resolução, isto é, obter sua solução.

Metodologia

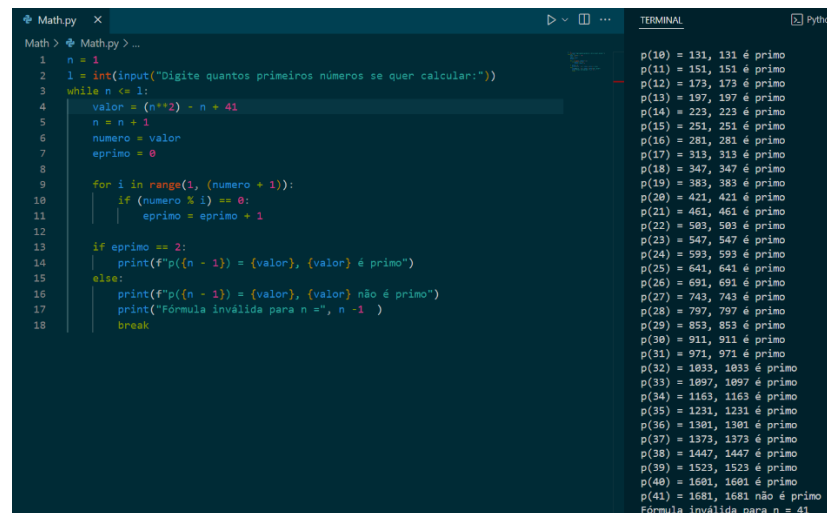
Para se alcançar os resultados esperados da pesquisa, foi realizado estudo teórico e discussões acerca do tema trabalhado. Foram usados recursos audiovisuais, material didático e software de matemática dinâmica (*GeoGebra*) para auxiliar o entendimento dos resultados.

A sequência de Fibonacci recebeu um tratamento mais detalhado visto sua associação à relação áurea que está presente em diversos fenômenos naturais. Para isso, foi realizado estudo do contexto histórico, por meio de pesquisar em sites e consultas em livros.

Resultados

O estudo das sequências matemáticas exige a análise de padrões específicos para obter fórmulas que determinem um termo em posição definida. No entanto, o conjunto de números primos, representado como $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$, não possui padrões que permitam uma expressão válida para todos os termos. A fórmula $P(n) = n^2 - n + 41$ busca determinar números primos maiores que 41 com base em suas posições, mas torna-se inválida no termo 41, cujo resultado é 1681. Este número possui três divisores (1, 41 e 1681), contrariando a definição de número primo. A figura 1, em linguagem Python, atesta a validade limitada da fórmula.

Figura 1 - Verificação da invalidez da fórmula $P(n) = n^2 - n + 41$.

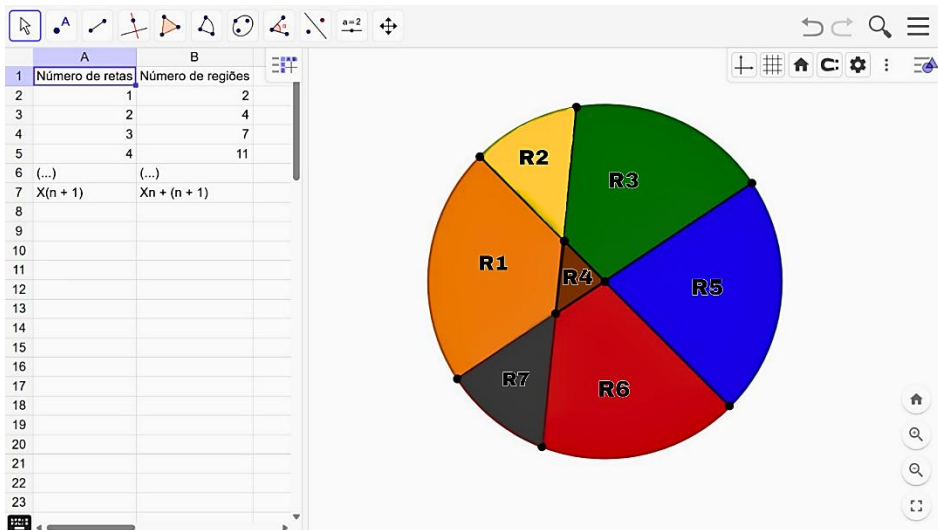


```
Mathpy x
Math > Mathpy > ...
1 n = 1
2 l = int(input("Digite quantos primeiros números se quer calcular:"))
3 while n <= l:
4     valor = (n**2) - n + 41
5     n = n + 1
6     numero = valor
7     eprimo = 0
8
9     for i in range(1, (numero + 1)):
10        if (numero % i) == 0:
11            eprimo = eprimo + 1
12
13        if eprimo == 2:
14            print(f"p{(n - 1)} = {valor}, {valor} é primo")
15        else:
16            print(f"p{(n - 1)} = {valor}, {valor} não é primo")
17            print("Fórmula inválida para n =", n - 1)
18            break
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
Fórmula inválida para n = 41
p(10) = 131, 131 é primo
p(11) = 151, 151 é primo
p(12) = 173, 173 é primo
p(13) = 197, 197 é primo
p(14) = 223, 223 é primo
p(15) = 251, 251 é primo
p(16) = 281, 281 é primo
p(17) = 313, 313 é primo
p(18) = 347, 347 é primo
p(19) = 383, 383 é primo
p(20) = 421, 421 é primo
p(21) = 461, 461 é primo
p(22) = 503, 503 é primo
p(23) = 547, 547 é primo
p(24) = 593, 593 é primo
p(25) = 641, 641 é primo
p(26) = 691, 691 é primo
p(27) = 743, 743 é primo
p(28) = 797, 797 é primo
p(29) = 853, 853 é primo
p(30) = 911, 911 é primo
p(31) = 971, 971 é primo
p(32) = 1033, 1033 é primo
p(33) = 1097, 1097 é primo
p(34) = 1163, 1163 é primo
p(35) = 1231, 1231 é primo
p(36) = 1301, 1301 é primo
p(37) = 1373, 1373 é primo
p(38) = 1447, 1447 é primo
p(39) = 1523, 1523 é primo
p(40) = 1601, 1601 é primo
p(41) = 1681, 1681 não é primo
```

Fonte: Autoria própria.

Para compreender recorrências de 1ª ordem, analisou-se o problema da Pizza de Steiner: determine o número máximos de pedaços que uma pizza pode ser dividida por cortes retilíneos. Observou-se um padrão entre o número de retas e regiões, representado por: $X_{n+1} = X_n + (n + 1)$, onde $X_1 = 2$. Para obter uma expressão não recursiva, aplicaram-se técnicas de resolução de recorrências de 1º ordem, chegando à fórmula: $X_{n+1} = \frac{(n^2 + n + 2)}{2}$, validada pelo Princípio de Indução Finita. A figura 2 apresenta, algumas regiões construídas no aplicativo *GeoGebra*, da pizza de Steiner.

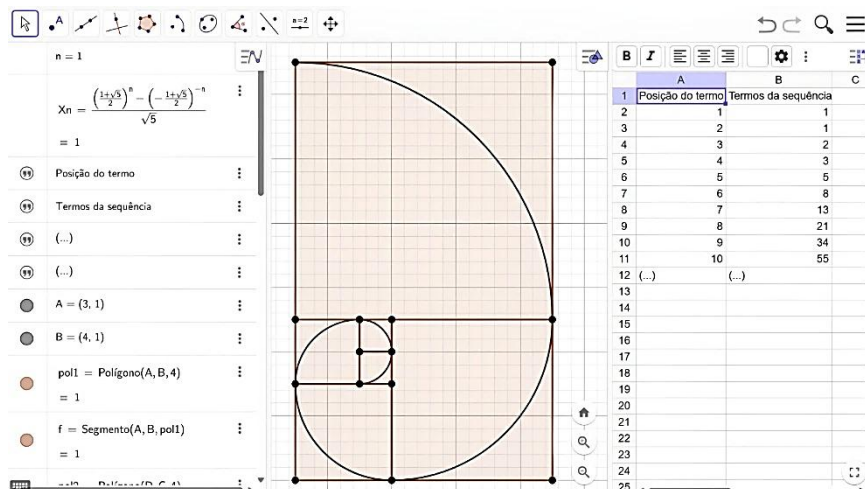
Figura 2 - Pizza de Steiner.



Fonte: Autoria própria

Uma análise interessante foi a observação do padrão da sequência de Fibonacci, na qual cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Foi demonstrada, entretanto, a existência de uma fórmula não recursiva que descreve a sequência: $X_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$ onde $n \geq 0$ e $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Essa fórmula permite determinar qualquer termo da sequência com base apenas na sua posição. Além disso, a sequência de Fibonacci apresenta uma espiral característica, na qual os lados dos quadrados correspondem a números da sequência, determinados pela soma dos lados dos quadrados anteriores. A figura 3 abaixo mostra, via janelas (janela álgebra, visualização 2D e planilha) do aplicativo *GeoGebra*, a espiral.

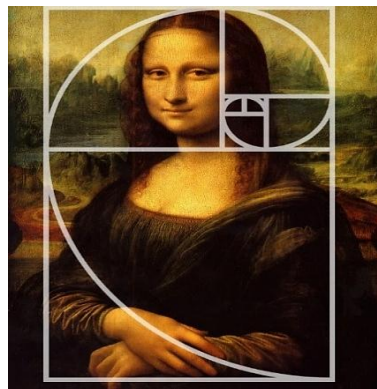
Figura 3 - Espiral de Fibonacci.



Fonte: Autoria própria

Os estudos das aplicações da sequência de Fibonacci são imprescindíveis na análise das recorrências numéricas, visto que a sequência está presente na natureza de diversas formas. Além disso, ela se apresentou e ainda apresenta grande utilidade para diversos artistas contemporâneos e antigos. Com isso, é provável que o polímata Leonardo da Vinci tenha utilizado a espiral de Fibonacci e a razão áurea na composição de algumas de suas obras, visto que essa sequência é considerada um símbolo de perfeição na natureza, podendo estar, por exemplo, em um dos quadros mais conhecidos de toda a história da humanidade – a Mona Lisa, de Da Vinci. A figura 4 evidencia a espiral de Fibonacci no quadro – Mona Lisa, de Da Vinci.

Figura 4 - Espiral de Fibonacci no quadro – Mona Lisa, de Da Vinci.



Fonte: <https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/>, acesso em 07/07/2025

Como visto no resultado do estudo anterior, a sequência de Fibonacci está presente em diversas formas na natureza, tendo sido utilizada como símbolo de perfeição por estudiosos tanto da contemporaneidade quanto da antiguidade, em múltiplas áreas do conhecimento. Uma aplicação notável e amplamente reconhecida dessa sequência ocorre na própria natureza, onde é possível identificar a razão áurea e a espiral de Fibonacci em diversas estruturas naturais. Um exemplo notório é a distribuição das sementes de girassol, nas quais o número de espirais geralmente corresponde a um número da sequência de Fibonacci. Na figura 6, é mostrado o número de espirais no sentido horário na distribuição de sementes de um girassol, cujo número é 21, que é um número de Fibonacci.

Figura 5 - Espirais na distribuição de sementes em um girassol.



Fonte: Adaptação autoral da imagem obtida em: <https://pt.vecteezy.com/foto/6913898>, acesso em 07/07/2025

Discussão

Ao realizar o estudo de sequências numéricas, é imprescindível o uso de raciocínio lógico e observação de padrões matemáticos, no qual possibilita o pensamento crítico e desenvolve a capacidade de resolver problemas. Na matemática, a identificação e a análise de padrões desempenham um papel fundamental para a compreensão de fenômenos que acompanham a humanidade desde tempos remotos. Desde a percepção da periodicidade de cometas no céu até o estudo de formas singulares presentes tanto em nosso cotidiano quanto em vastos aspectos do universo, esses padrões proporcionam entendimentos valiosos e auxiliam no desenvolvimento do conhecimento científico.

Para o entendimento desses padrões numéricos de sequências matemáticas, é cabível o entendimento de generalização, ou seja, a capacidade de uma determinada expressão determinar termos seguindo-se o padrão pré-estabelecido originalmente.

Entretanto, para solucionar-se os problemas que a dificuldade de generalização de sequências infinitas trazem, é necessário recorrer-se ao Princípio de Indução Finita, que por sua vez, comprova se uma determinada expressão que determina um termo qualquer de uma sequência, é capaz de ser válida para todos os seus termos. Pois na matemática, se uma regra é válida até certo ponto, ela deixa de ser regra, pois não favorece a todos os seus termos.

Uma das sequências mais intrigantes por apresentar uma presença singular na natureza, é a sequência de Fibonacci. A mesma caracteriza-se por se tratar de uma sequência de 2º ordem homogênea, onde obtemos o seus termos pela soma dos dois que o antecedem. A sequência de Fibonacci, juntamente com o número de ouro(ϕ), estão presentes em diversos aspectos da natureza, como o formato da orelha humana, a

distribuição de sementes de um girasol, etc. Demonstrando, portanto, o quão fundamental o reconhecimento de padrões presentes na natureza podem ter resultados matemáticos intrínsecos. Vale resaltar que na natureza existem diversos padrões conhecidos e desconhecidos, sendo a sequência de Fibonacci uma das mais populares.

Conclusão

O estudo investigou as recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem, suas aplicabilidades para a resolução de problemas matemáticos e sua presença singular na natureza. Os resultados indicam que a busca por padrões é fundamental para a construção de uma fórmula matemática contundente. Todavia, a validação de uma fórmula matemática baseada intrinsecamente em ínfimos testes não se mostra favorável. Contudo, a análise teórica apoia-se no Princípio de Indução Finita, que descreve com precisão a validade de uma expressão matemática. Esta pesquisa contribui para o entendimento das recorrências numéricas, enfatizando a busca por padrões e a validação de fórmulas obtidas por meio destes padrões.

Agradecimentos

Agradeço à FAPEMA – que foi a responsável pelo financiamento e apoio ao desenvolvimento do nosso projeto, ao IFMA/Campus Coelho Neto – o qual foi o fornecedor da estrutura física para as aulas teóricas do projeto. Agradeço também ao Departamento de Pesquisa, Pós-Graduação e Inovação – DPPGI / Campus Coelho Neto – por permitir o desenvolvimento de pesquisa no campus.

Referências

GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 31/03/2025.

MOL, Rogério Santos. Introdução à história da matemática. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SOMINSKI, I.S. Método de indução matemática. Coordenação Nilson José Machado.
Tradução: Gelson Iezzi. São Paulo: Atual: Moscou: Editora MIR, 1996.

PITOMBEIRA, João Bosco. ROQUE, Tatiana Marins. TÓPICOS DE HISTÓRIA DA
MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: SBM, 2012.