Uma Breve Introdução ao Modelo de Lotka-Volterra

Autor: Sharael Constantino da Silva / Orientador: Prof. Roberto Antonio Cordeiro Prata.

Universidade Federal do Amazonas, Instituto de Ciências Exatas,Departamento de Matemática, Av. Octávio Hamilton Botelho Mourão - Coroado, Manaus - AM, Manaus AM, Brasil.

sharaeldasilva@gmail.com / *praroberto@ufam.edu.br*.

Palavras-Chave: Modelo Predador-Presa, Sistemas Não Lineares, Estabilidade, Linearização.

Introdução

A interação entre espécies em competição representa um fenômeno fundamental na ecologia, que pode se manifestar de forma desarmônica intraespecífica ou interespecífica. Um caso clássico é a relação entre predadores e presas, onde uma espécie se alimenta da outra, gerando um ciclo dinâmico de dependência mútua. Para investigar essas interações desarmônicas, o químico-matemático **Alfred Lotka** (1925) identificou inicialmente um sistema de dinâmica populacional, onde as especies são influenciadas por fatores de ambiente, comportamento e relações. Posteriormente, o matemático **Vito Volterra** (1926) reconheceu o modelo como um mecanismo essencial da natureza. Dessa forma, o Modelo Predador-Presa, proposto por Lotka e Volterra, é conhecido por descrever tais interações competitivas, baseando-se no sistema autônomo no plano, uma particularidade de sistemas não lineares. A problemática desse modelo está relacionada à estabilidade, uma propriedade fundamental para compreender o comportamento das populações em equilíbrio. Para isso, buscamos analisar os autovalores associados aos pontos de equilíbrio, que permitem prever a coexistência ou extinção das espécies. O processo de resolução desse modelo é a linearização através da matriz Jacobiana, uma técnica de aproximação linear de sistemas não lineares, onde analisamos localmente o comportamento dinâmico desse sistema. Nesse sentido, a complexidade de sistemas não lineares exige técnicas como a linearização para permitir o estudo qualitativo e quantitativo de suas trajetórias. Para esse estudo, nos baseamos em[1],[2],[3] e[4].

Resultados e Discussão

A análise do modelo predador-presa de Lotka-Volterra, representado pelo sistema de equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

Onde:

- $x(t)$: População de presas no tempo t
- $y(t)$: População de predadores no tempo t
- α: Taxa de reprodução das presas
- β: Taxa de mortalidade das presas
- δ: Taxa de conversão de presas em novos predadores
- γ: Taxa de mortalidade dos predadores.

Mostra a existência de dois pontos de equilíbrio biologicamente relevantes. O primeiro, $(x^*, y^*) = (0, 0)$, corresponde ao cenário de extinção de ambas as espécies. O segundo, $(x^*, y^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, representa um estado de coexistência onde as populações se mantêm constantes ao longo do tempo, desde que não haja perturbações externas.
A estabilidade local desses pontos foi investigada mediante o processo de linearização do sistema não linear em torno de cada equilíbrio, utilizando a matriz Jacobiana:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

Para o ponto de extinção $(0, 0)$, a Jacobiana avaliada resulta em:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}$$

Os autovalores associados a essa matriz são $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -\gamma$. Considerando que $\alpha > 0$ (taxa de crescimento intrínseco das presas) e $\gamma > 0$ (taxa de mortalidade dos predadores), temos autovalores reais com sinais opostos. De acordo com a classificação de pontos de equilíbrio para sistemas lineares bidimensionais, essa configuração caracteriza um **ponto de sela**, que é **instável**. Isso significa que trajetórias iniciadas próximas a esse ponto tenderão a se afastar dele, exceto aquelas que se encontram exatamente na direção do autovetor associado ao autovalor negativo. Biologicamente, isso indica que a extinção total é um estado instável: a introdução de mesmo uma pequena quantidade de presas ($x > 0$) fará com que a população escape da extinção, crescendo exponencialmente na ausência de predadores.

Para o ponto de coexistência $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, a Jacobiana é:

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

A equação característica associada é:

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 + \alpha\gamma = 0$$

cujas raízes são $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha\gamma}$. Autovalores **puramente imaginários** indicam que o sistema linearizado possui um **centro**. No plano de fase, as trajetórias são elipses fechadas em torno do ponto de equilíbrio, correspondendo a **oscilações periódicas** nas populações de presas e predadores. Isto implica que, na vizinhança desse ponto, as populações não convergem nem divergem, mas oscilam indefinidamente. O modelo prevê ciclos nos quais um aumento na população de presas leva a um aumento subsequente de predadores, que por sua vez reduz as presas, levando à escassez de alimento e declínio dos predadores, permitindo então a recuperação das presas, e assim sucessivamente.

É crucial destacar, no entanto, que a conclusão de que o ponto de coexistência é um centro *vale apenas para o sistema linearizado*. Sistemas não lineares podem exibir comportamentos mais complexos, e o teorema de linearização nem sempre é conclusivo quando os autovalores são puramente imaginários. Neste caso específico, sabe-se que o modelo de Lotka-Volterra original possui de fato órbitas fechadas (centros) no plano de fase, mas isso é uma propriedade particular deste sistema conservativo e não uma regra geral para sistemas não lineares com autovalores imaginários.

Os resultados obtidos concordam com a teoria ecológica clássica: o modelo captura a essência da relação cíclica entre predador e presa. A ausência de amortecimento nas oscilações (devido à falta de termos que dependam da densidade populacional de forma a regular o crescimento) é uma limitação do modelo básico. Na natureza, fatores como capacidade de suporte do ambiente, competição intraespecífica ou alterações comportamentais introduziriam amortecimento, podendo transformar o centro em um foco estável, onde as oscilações se extinguiriam até atingir um equilíbrio estável.

A metodologia de linearização provou-se extremamente eficaz para uma análise local rápida e para a classificação da estabilidade dos pontos de equilíbrio. Ela permitiu extrair informações cruciais sobre o comportamento do sistema complexo não linear a partir da análise de um sistema linear mais simples, cuja solução é bem conhecida. Este caso exemplifica perfeitamente a utilidade de técnicas de análise qualitativa de sistemas dinâmicos não lineares, contornando a dificuldade de encontrar soluções analíticas explícitas.

Conclusões

O estudo do modelo predador-presa de Lotka-Volterra evidenciou a importância da competição interespecífica na regulação de populações. A identificação dos pontos de equilíbrio e a análise de sua estabilidade por meio de autovalores permitiram compreender as condições para coexistência ou extinção. A linearização mostrou-se uma ferramenta vital para tratar sistemas não lineares complexos, aproximando-os localmente e facilitando a interpretação de seu comportamento. Sistemas autônomos, como o aqui analisado, oferecem uma estrutura simplificada para modelar interações ecológicas temporais. A problemática inerente aos sistemas não lineares—*como a falta de soluções gerais e a sensibilidade a condições iniciais*—foi contornada pela abordagem qualitativa baseada em linearização. Este trabalho reforça a relevância de modelos matemáticos na ecologia e destaca a necessidade de técnicas avançadas para analisar dinâmicas populacionais mais complexas e realistas.

Agradecimentos

Agradeço a FNDE e ao PET Matemática por me proporcionarem a chance de desenvolver essa pesquisa.

Referências

[1] Barros, A. V. *O Modelo Lotka - Volterra*. UNIFAP, Macapá. 2018.

[2] Boldrini, J. *Álgebra Linear*. Harbra, São Paulo. 1986.

[3] Figueiredo, Djairo Guedes de Neves, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. IMPA, Rio de Janeiro. 1997.

[4] Sodre, U. *Modelos matemáticos*. UEL, Londrina. 2007.