

**EXTENSÃO DO CONCEITO DE CORPO ORDENADO COMPLETO EM \mathbb{R}
PARA ESPAÇOS NORMADOS GERAIS**

Moisés Victor Costa Ribeiro Ferreira (amoisesvictor123@gmail.com)

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo sobre espaços métricos e suas propriedades, com foco em mostrar critérios para identificar quando um espaço é completo. A motivação do trabalho é se aprofundar em tópicos vistos na disciplina de Análise, enquanto abordamos os espaços mais gerais. Por exemplo, ao estudar as sequências de Cauchy, vemos que toda sequência convergente é de Cauchy, no entanto não é possível afirmar o contrário. Ao tomar a sequência de Cauchy $(1/n)$ com n natural, vemos que essa sequência está contida no espaço $(0,5]$ porém a sequência está convergindo para 0 e portanto $(1/n)$ diverge no espaço $(0,5]$. Um espaço métrico é completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Embora esse critério das sequências de Cauchy seja o principal para determinar a completude do espaço métrico, ele não é o único. Dito isso, mostramos que os seguintes critérios são equivalente e também podem ser usados para determinar quando um espaço X é completo: Toda sequência de Cauchy em X converge em X ; X não possui pontos virtuais; X é fechado universalmente; (Se X é um espaço vetorial normado) Toda série absolutamente convergente é convergente. Para mostrar que a reta real munida da métrica usual satisfaz esses critérios e, portanto, é um espaço métrico completo, usamos uma propriedade que é suficiente. Seja (X, d) um espaço métrico e seja (Y, e) um espaço métrico no qual (X, d) seja subespaço de (Y, e) . Ao calcular a distância de um elemento y de Y até o

conjunto X , temos que $e(y, X) = \inf \{e(y, x) \mid x \text{ pertence a } X\}$. Não necessariamente existe x em X tal que $e(y, X) = e(y, x)$. No caso de X ser um conjunto onde para todo y em Y existir x em X tal que $e(y, X) = e(y, x)$, dizemos que X tem a propriedade do ponto mais próximo. Supondo que X tenha a propriedade do ponto mais próximo, torna-se simples observar que X é universalmente fechado. Tome (Y, e) de forma que (X, d) seja um subespaço métrico de (Y, e) e tome y em Y , onde y está no fecho de X . Por y estar no fecho de X , temos que $e(y, X) = 0$. Como X tem a propriedade do ponto mais próximo, existe x em X tal que $0 = e(y, X) = e(y, x)$. Donde $y = x$ e, portanto, y está em X . Dessa forma, podemos reduzir a demonstração de que a reta real satisfaz os critérios ao fato de ela possuir a propriedade do ponto mais próximo. Com efeito, a reta real é um espaço completo, e toda sequência de Cauchy nela contida converge para algum ponto da própria reta.

1. LIMA, E. L. Curso de análise. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981. v. 2.

2. LIMA, E. L. Espaços métricos. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

3. O'SEARCOID, M. Metric spaces. Springer Science & Business Media, 2006.

Palavras-chave: espaços métricos; sequências de cauchy; critérios de completude.