

Um Critério de Convergência para Redes Neurais Quânticas Híbridas

Pedro Calligaris Delbem, Lucca Rodrigues Cunha, Bernardo Maia Coelho, Rodrigo Silva de Almeida, César Magno Leite de Oliveira Junior, Filippo Ghiglieno, Alexandre Delbem

Resumo—Este artigo propõe um critério de convergência para redes neurais quânticas híbridas, garantindo que para qualquer entrada, a rede forneça a saída correta com probabilidade superior a 50%. Analisando a relação entre o erro médio da rede e os erros individuais para cada combinação de entrada, derivamos uma tolerância máxima para o erro médio que garante essa condição. Demonstramos que este critério teoricamente derivado corresponde a um valor heurístico adotado em aplicações práticas, validando sua aplicabilidade. Os resultados são suportados por uma análise comparativa dos comportamentos de convergência de um perceptron quântico em diferentes algoritmos de treinamento, ilustrando a relevância prática do limiar de erro proposto.

Palavras-Chave—Redes Neurais Quânticas, Critério de Convergência, Perceptron Quântico, Análise de Erro.

Abstract—This paper proposes a convergence criterion for hybrid quantum neural networks, ensuring that for any given input, the network provides the correct output with a probability greater than 50%. By analyzing the relationship between the average error of the network and the individual errors for each input combination, we derive a maximum tolerance for the average error that guarantees this condition. We demonstrate that this theoretically derived criterion corresponds to a heuristic value adopted in practical applications, validating its applicability. The results are supported by a comparative analysis of the convergence behaviors of a quantum perceptron across different training algorithms, illustrating the practical relevance of the proposed error threshold.

Keywords—Quantum Neural Networks, Convergence Criterion, Quantum Perceptron, Error Analysis.

I. INTRODUÇÃO

A computação quântica deu origem ao campo promissor das redes neurais quânticas (QNNs) [1]. Um dos desafios centrais para a aplicação prática desses novos modelos é o processo de treinamento, especificamente, a determinação do momento em que a rede pode ser considerada “treinada”. A ausência de um critério formal pode levar a comparações injustas entre diferentes métodos de otimização e a uma incerteza sobre a confiabilidade do modelo final.

Para entender a complexidade de se definir “treinada”, este trabalho primeiramente analisa o comportamento empírico de um perceptron quântico sob diversos algoritmos. A análise dos resultados, com suas variações em velocidade, precisão e confiabilidade, revelará a necessidade de um critério de

convergência que seja formal e bem fundamentado, em vez de arbitrário. Somente após estabelecer essa necessidade, proporemos uma solução teórica e a usaremos para reinterpretar os resultados experimentais.

II. METODOLOGIA E PROPOSTA DO CRITÉRIO

A. Conceitos Fundamentais

Redes neurais artificiais são modelos computacionais inspirados no cérebro humano, cujo treinamento visa ajustar “pesos” para minimizar um erro [2]. A computação quântica, por sua vez, utiliza princípios como superposição e emaranhamento de qubits para processar informações. O modelo de QNN híbrida integra ambos: um processador quântico (QPU) executa um circuito parametrizado, e um processador clássico otimiza esses parâmetros. Neste modelo, o componente clássico tipicamente seleciona o resultado de maior probabilidade medido no QPU para ser a saída do neurônio.

B. Análise Empírica e a Necessidade de um Critério

Para avaliar o comportamento de uma QNN, foi escolhida a tarefa de aprender as portas lógicas XOR e XNOR. Essa escolha não é trivial: enquanto um perceptron clássico é incapaz de resolver problemas não-linearmente separáveis como o XOR, um perceptron quântico consegue realizar essa tarefa [3]. Essa capacidade representa uma vantagem quântica fundamental e torna o problema um excelente benchmark.

O objetivo funcional de treinar a rede é alcançar um estado onde todas as quatro combinações de entrada das portas lógicas produzam o resultado correto com mais de 50% de chance. A Figura 1 mostra a confiabilidade do treinamento, ou seja, a frequência com que os algoritmos atingem esse estado funcional (4 saídas corretas para cada uma das entradas).



Fig. 1. Confiabilidade para o critério de parada de $E_{total} < 0.5$. Cada célula representa a maior razão entre saídas corretas e total de saídas obtida em todas as execuções do treinamento.

Observa-se que, para alguns dos métodos de busca, é possível atingir o objetivo de 4 saídas corretas para cada uma das 4 entradas. No entanto, o treinamento é interrompido com base

no *erro médio*, não no sucesso individual de cada entrada o que leva a uma falha no treinamento em alguns casos. A análise empírica, portanto, expõe a questão central: como o erro médio, que é a métrica observável durante o treinamento, se conecta com a garantia de que *todas* as entradas individuais funcionarão corretamente? Os resultados mostram que o estado desejado é alcançável, mas não fornecem a ponte teórica entre a métrica de treinamento e o objetivo funcional.

C. Proposta de um Critério de Convergência Fundamentado

Tendo demonstrado a necessidade de conectar a métrica de treinamento ao objetivo funcional, propomos agora um critério com fundamentação teórica. A motivação vem da própria arquitetura híbrida: como o hardware clássico seleciona o resultado de maior probabilidade, é crucial garantir que, para cada entrada, a probabilidade da resposta correta seja superior a 50%. Isso equivale a exigir que o erro para cada entrada individual seja menor que 0.5.

Proposição: Se o erro médio total, E_{total} , for menor que $\frac{0.5}{N}$ (onde $N = 2^n$ é o número de entradas possíveis), podemos garantir que o erro para cada entrada individual, e_k , será menor que 0.5.

Demonstração Resumida: A prova parte da premissa $E_{total} < \frac{0.5}{N}$. Ao substituir a definição de $E_{total} = \frac{1}{N} \sum e_i$, chegamos a $\sum e_i < 0.5$. Como qualquer erro individual e_k é não-negativo e, portanto, menor ou igual à soma total ($e_k \leq \sum e_i$), conclui-se que $e_k < 0.5$.

Para o caso experimental com $n = 2$ entradas, este critério estabelece um limiar prático e não-arbitrário: a tolerância para o erro médio deve ser $E_{total} < \frac{0.5}{4} = 0.125$.

III. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o critério estabelecido em $E_{total} < 0.125$, podemos agora validar a teoria com os resultados experimentais. A Figura 2 mostra a confiabilidade dos algoritmos quando o treinamento é interrompido usando precisamente o nosso critério teórico.

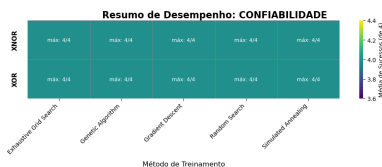


Fig. 2. Confiabilidade para o critério de parada de $E_{total} < 0.125$. Cada célula representa a maior razão entre saídas corretas e total de saídas obtida em todas as execuções do treinamento.

Os resultados confirmam a validade da proposição. Ao atingir o limiar de erro médio de 0.125, as melhores execuções de **todos os métodos de treinamento** alcançaram o estado funcional desejado, onde todas as 4 combinações de entrada foram classificadas corretamente. O fato de que diferentes estratégias de otimização convergem para o mesmo resultado funcional ao atingir esse limiar demonstra que o critério é um indicador de sucesso robusto, independente do caminho tomado para alcançá-lo.

Adicionalmente, a relevância do nosso critério é reforçada ao conectá-lo com abordagens da literatura. Enquanto Tacchino et al. estabelecem empiricamente que um limiar de acurácia para o resultado adequado [4], nosso trabalho fornece a fundamentação teórica: nós derivamos a condição necessária sobre o erro médio de treinamento para garantir que essa acurácia de saída seja de fato alcançada para todas as entradas possíveis.

IV. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

É notório que apenas o critério $E_{total} < 0.125$ obtém todas as saídas corretas para todas as entradas, o erro médio de treinamento deve ser menor que 0.125 para garantir que a rede atingiu o estado funcional desejado. Apesar deste critério exigente levar a um maior tempo de treinamento, ele garante que a rede atingiu o estado funcional desejado.

A análise empírica demonstrou que, embora seja possível treinar uma QNN para classificar corretamente todas as suas entradas, era necessária uma ponte teórica entre a métrica de treinamento (erro médio) e este objetivo funcional. A proposição de um limiar teórico, $E_{total} < 0.125$ para problemas de 2 qubits, forneceu essa conexão. Embora obter um erro baixo para uma porta lógica possa parecer uma tarefa simples, a importância de um critério bem-fundamentado — validado através deste caso de estudo claro — está em sua aplicação a problemas mais complexos, onde a definição de "treinado" não é tão evidente.

Os resultados experimentais validaram o critério, mostrando que, independentemente do algoritmo de otimização, atingir o limiar de erro médio proposto garante que a rede atingiu o estado funcional desejado. Este trabalho oferece um caminho para o treinamento mais confiável e metodologicamente sólido de redes neurais na era quântica.

Como trabalhos futuros, faz-se possível testar este critério em arquiteturas de QNN mais complexas e para conjuntos de dados além de portas lógicas. Além disso, investigar sua aplicabilidade e robustez em hardware quântico real, onde o ruído é um fator significativo, será um passo importante para validar ainda mais sua utilidade prática.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro de Inteligência Artificial (C4AI-USP), pelo apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, processo n 2019/07665-4), da IBM Corporation, do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI, FAPESP, processo n 2013/07375-0) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

REFERÊNCIAS

- [1] S. Kak, "On quantum neural computing", *Advances in Imaging and Electron Physics*, v. 94, pp. 259-313, 1995.
- [2] C. M. Bishop, "Pattern Recognition and Machine Learning". Springer, 2006.
- [3] I.V. Grossu, "Single qubit neural quantum circuit for solving Exclusive-OR," *MethodsX*, v. 8, p. 101573, 2021.
- [4] F. Tacchino, C. Macchiavello, D. Gerace, e D. Bajoni, "An artificial neuron implemented on an actual quantum processor," *npj Quantum Information*, v. 5, art. 26, 2019.