

DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE REYNOLDS PARA ESCOAMENTO DE KOVASZNAY USANDO REDES NEURAIS COM INFORMAÇÃO FÍSICA

Gabriel I. Barboza¹, Andre P. Gomes², Geovani V. Silva³, Vitor Petri Silva⁴,
Lucia Catabriga⁵, Isaac P. Santos⁶.

Ciências Exatas e da Terra

Introdução e Objetivo

A caracterização do regime de escoamentos incompressíveis é fundamental em diversas aplicações da engenharia hidráulica e mecânica. Um dos principais parâmetros para essa caracterização é o número de Reynolds (Re), uma grandeza adimensional que expressa a razão entre forças inerciais e viscosas em um fluido, sendo essencial para distinguir regimes laminar, transicional ou turbulento. Esse parâmetro emerge naturalmente da análise adimensional das equações de Navier–Stokes e exerce papel central na modelagem e previsão de escoamentos.

Com os avanços recentes em aprendizado de máquina e ciência de dados, novas técnicas têm sido empregadas para a solução e a descoberta de modelos matemáticos a partir de dados. Dentre essas, destacam-se as *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs), que incorporam as leis físicas do problema diretamente na função de perda da rede neural, combinando flexibilidade computacional e rigor matemático. Embora redes neurais tenham sido utilizadas para resolver equações diferenciais desde a década de 1990 (LAGARIS; LIKAS; FOTIADIS, 1998), foi com a formulação das PINNs (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019) que esse campo ganhou novo impulso, permitindo enfrentar problemas complexos com maior robustez e interpretabilidade.

O objetivo deste trabalho é demonstrar a aplicabilidade das PINNs na estimativa do número de Reynolds (Re) em problemas de escoamento incompressível. Para isso, considera-se o escoamento laminar de Kovasznay (KOVASZNAY, 1948) em sua formulação inversa, utilizando dados sintéticos gerados a partir da solução analítica do modelo, com ruído adicionado para simular um cenário próximo ao real. O desempenho do método é avaliado tanto na identificação precisa do valor de Re quanto na capacidade de reconstruir os campos de velocidade e pressão no domínio.

¹Mestrando em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, gabriel.i.barboza@edu.ufes.br;

²Mestrando em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, andre.p.gomes@edu.ufes.br;

³Mestrando em Física, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, geovani.v.silva@edu.ufes.br;

⁴Mestrando em Física, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, vitor.p.silva@edu.ufes.br;

⁵Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, luciac@inf.ufes.br.

⁶Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, isaac.santos@ufes.br.

Método e Metodologia

PINNs podem ser entendidas como uma técnica de regularização que incorpora as equações que definem o modelo diretamente na função de perda de uma rede neural, na forma de resíduos a serem minimizados. O escoamento de Kovasznay corresponde a uma solução analítica laminar estacionária particular das equações de Navier–Stokes incompressíveis em duas dimensões, que consistem em achar o campo de velocidade (u, v) e o campo de pressão p tais que,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

onde $\Omega = (-0.5, 1.5) \times (-0.5, 1.0) \subset \mathbb{R}^2$, e $\Gamma = \partial\Omega$ representa a fronteira do domínio, na qual são impostas condições de contorno obtidas das soluções analíticas para u , v e p , que são dadas por

$$u(x, y) = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y), \quad v(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y), \quad (4)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2}(1 - e^{2\lambda x}), \quad \lambda = \frac{Re}{2} - \sqrt{\frac{Re^2}{4} + 4\pi^2}. \quad (5)$$

A função de custo da rede neural é definida como

$$\mathcal{L}_{\text{total}}(\mathbf{w}, Re) = \omega_{\text{física}} \mathcal{L}_{\text{física}}(\mathbf{w}, Re) + \omega_{\text{dados}} \mathcal{L}_{\text{dados}}(\mathbf{w}), \quad (6)$$

onde $\mathbf{w}$ é o vetor de pesos e vieses da rede neural; $\mathcal{L}_{\text{física}}(\mathbf{w}, Re)$ representa o erro quadrático médio dos resíduos do sistema (1)–(3), avaliado nos pontos de colocação em Ω e em Γ ; $\mathcal{L}_{\text{dados}}(\mathbf{w})$ corresponde ao erro quadrático médio em relação aos dados observados nos pontos de colocação; e $\omega_{\text{física}}$ e ω_{dados} são hiperparâmetros que ponderam as contribuições de cada termo na função de perda.

O problema então consiste em determinar os parâmetros ótimos da rede $\mathbf{w}^*$, bem como a estimativa do número de Reynolds Re^* , tais que

$$(\mathbf{w}^*, Re^*) = \arg \min_{\mathbf{w}, Re} \mathcal{L}_{\text{total}}(\mathbf{w}, Re).$$

No treinamento da rede PINN foram utilizados $N_D = 2048$ pontos de colocação no domínio Ω e $N_F = 400$ pontos na fronteira Γ , outros 512 pontos no domínio foram usados para testar o modelo a cada iteração. Foram gerados 1000 dados de treinamento a partir da solução exata para u , v e p . Para avaliar a resiliência do método a dados ruidosos, adicionou-se um ruído gaussiano correspondente a 10% do valor máximo de cada variável.

A arquitetura adotada foi uma rede *feedforward* simples, com quatro camadas escondidas, 50 nós por camada e função de ativação tangente hiperbólica (*tanh*). Utilizou-se o otimizador de primeira ordem *Adam* (KINGMA; BA, 2014) com taxa de aprendizagem 10^{-3} durante 60.000 iterações. Ambos os pesos $\omega_{\text{física}}$ e ω_{dados} foram fixados em 1. O valor de referência $Re = 50$ foi

empregado para gerar os dados sintéticos, enquanto o valor inicial considerado no treinamento foi 10. A implementação foi realizada com a biblioteca *DeepXDE* (LU et al., 2021). O código completo encontra-se disponível em repositório público no GitHub¹.

Discussão e Resultados

Para a análise dos resultados, apresentam-se: (i) os gráficos de convergência da função de perda e da estimativa do número de Reynolds; (ii) as representações gráficas das soluções analíticas, dos dados ruidosos e das soluções obtidas pela rede; e (iii) os valores das métricas de erro, *mean square error* (MSE), norma $\mathcal{L}_2$ e norma do infinito ($\mathcal{L}_\infty$), para cada variável em comparação com a solução analítica.

A Figura 1 mostra o gráfico de convergência da rede e da estimativa do número de Reynolds. Observa-se que o modelo convergiu para o valor correto de Re , o valor estimado na última iteração foi de aproximadamente $Re_f = 50.167$. A conversão se deu por volta da iteração de número 50.000.

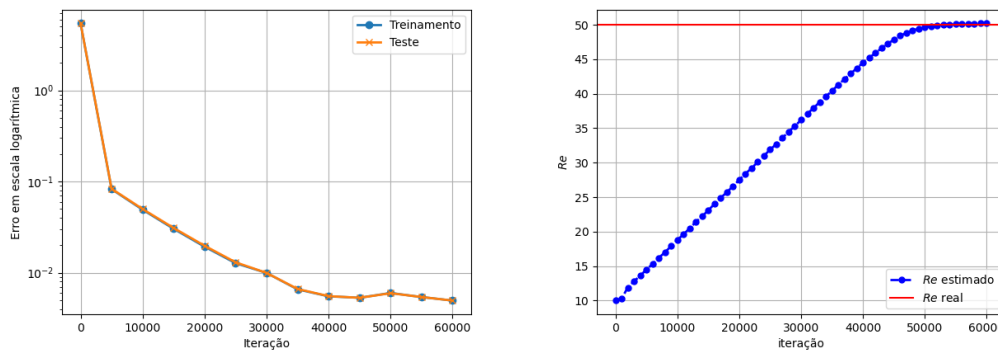


Figura 1: À esquerda, a evolução da função de perda durante o treinamento da PINN. À direita, as estimativas do número de Reynolds (Re) ao longo das iterações.

A Figura 2 apresenta, na primeira linha, as soluções de referência para as velocidades u e v , bem como para a pressão p . Na segunda linha são mostradas as superfícies após a adição de ruído gaussiano. A terceira linha ilustra as soluções aproximadas pela rede neural, que conseguiu reconstruir de forma fidedigna a solução de referência, evidenciando a resiliência do método frente a dados ruidosos.

A Tabela 1 apresenta os valores das métricas (MSE , norma $\mathcal{L}_2$ e norma $\mathcal{L}_\infty$) referentes às soluções aproximadas pela rede em comparação com as soluções analíticas, quantificando os resultados mostrados na Figura 2. Observa-se que os erros permanecem em níveis baixos para todas as variáveis, variando aproximadamente entre 10^{-6} e 10^{-2} . Nota-se ainda que as métricas MSE e $\mathcal{L}_\infty$ associadas à velocidade v e à pressão p são ligeiramente menores que as da velocidade u . Essa diferença, contudo, não indica uma perda de desempenho, mas está relacionada às distintas magnitudes físicas de cada variável, o que pode influenciar diretamente a escala dos erros absolutos reportados.

¹<<https://github.com/ginbar/concap2025NSpinns>>

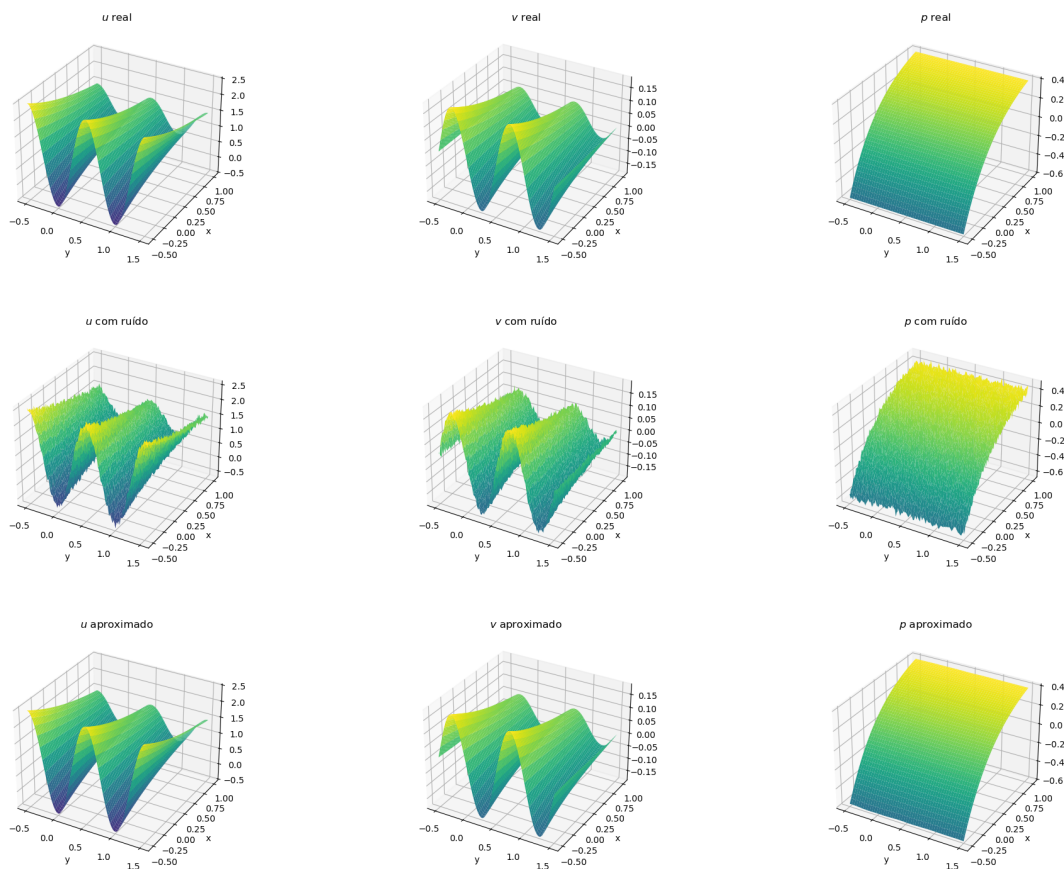


Figura 2: Na primeira linha, as soluções analíticas de referência; na segunda linha, as superfícies após a adição de ruído; e na terceira linha, as soluções aproximadas pela rede neural.

Tabela 1: Valores das métricas de erro (MSE , norma $\mathcal{L}_2$ e norma $\mathcal{L}_\infty$) para as soluções aproximadas pela rede neural, em comparação com as soluções analíticas.

Variável	Métricas		
	MSE	$\mathcal{L}_2$	$\mathcal{L}_\infty$
velocidade u	$8,628 \times 10^{-6}$	$2,444 \times 10^{-3}$	$1,182 \times 10^{-2}$
velocidade v	$1,005 \times 10^{-6}$	$1,252 \times 10^{-2}$	$4,81 \times 10^{-3}$
pressão p	$1,997 \times 10^{-6}$	$4,913 \times 10^{-3}$	$8,635 \times 10^{-3}$

Considerações Finais

Os resultados obtidos evidenciam que as *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) constituem uma abordagem promissora para a estimativa do número de Reynolds em escoamentos, ao integrar dados e informações físicas do fenômeno analisado. O modelo desenvolvido demonstrou capacidade não apenas de resolver o problema inverso, convergindo para o valor esperado de Re , mas também de atuar de forma direta, aproximando com precisão as distribuições de velocidade e pressão no domínio considerado.

Apesar dos resultados positivos, este estudo restringiu-se a um cenário simplificado, baseado em dados sintéticos idealizados, que não refletem integralmente as complexidades inerentes a aplicações reais. Ademais, a abordagem não foi avaliada para valores mais elevados de Re , nos quais o treinamento das redes tende a apresentar maiores desafios numéricos. Tampouco foi conduzida uma análise sistemática sobre o impacto de diferentes níveis de ruído na convergência e na qualidade das soluções obtidas.

Como perspectivas futuras, pretende-se ampliar a investigação para incluir dados sintéticos com diferentes valores de Re e intensidades de ruído, além de explorar bases de dados experimentais e escoamentos distintos do caso de Kovasznay. Uma evolução natural desse trabalho inclui a aplicação a escoamentos turbulentos, os quais impõem desafios adicionais e constituem um campo promissor para métodos baseados em PINNs.

Referências

- KINGMA, D. P.; BA, J. Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations*, 2014.
- KOVASZNAY, L. I. G. Laminar flow behind a two-dimensional grid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, v. 44, n. 1, p. 58–62, 1948.
- LAGARIS, I. E.; LIKAS, A.; FOTIADIS, D. I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 9, n. 5, p. 987–1000, Sep. 1998. ISSN 1045-9227.
- LU, L. et al. Deepxde: A deep learning library for solving differential equations. *SIAM Review*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 63, n. 1, p. 208–228, jan. 2021. ISSN 1095-7200. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/19M1274067>>.
- RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 378, p. 686–707, 2019.