

PINNS PARA EQUAÇÕES DE BLACK-SCHOLES-MERTON: UMA SOLUÇÃO BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA PARA PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES FINANCEIRAS.

Andre P. Gomes¹, Gabriel I. Barboza², Geovani V. Silva³, Vitor Petri Silva⁴, Lucia Catabriga⁵,
Isaac P. Santos⁶

Ciências Exatas e da Terra

Introdução e Objetivo

O mercado de opções constitui um dos segmentos mais dinâmicos e sofisticados do sistema financeiro global, oferecendo instrumentos que possibilitam alavancagem de ganhos, mitigação de riscos e desenvolvimento de estratégias complexas de negociação (HULL, 2018). A determinação do preço de uma opção é influenciada por variáveis como o valor do ativo subjacente, o tempo até o vencimento, a taxa de juros livre de risco e a volatilidade do ativo (BLACK; SCHOLES, 1973). Entre os modelos clássicos de precificação, o de Black–Scholes–Merton destaca-se por fornecer uma solução analítica elegante para opções europeias, consolidando-se como referência fundamental desde sua proposição na década de 1970 (MERTON, 1973).

Nos últimos anos, o avanço das técnicas de aprendizado de máquina tem impulsionado novas abordagens para problemas tradicionalmente tratados por métodos numéricos ou analíticos. Nesse contexto, as *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) surgem como uma alternativa promissora para a solução de equações diferenciais parciais, integrando diretamente a formulação matemática do problema à função de perda da rede neural (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019). Essa característica confere às PINNs elevada flexibilidade, capacidade de generalização e eficiência mesmo em cenários com dados limitados, o que tem motivado sua aplicação em diversos domínios, incluindo finanças quantitativas (KARAPANTZOS; PAPALITSAS, 2021).

O objetivo deste trabalho é investigar a aplicação das PINNs na resolução da equação de Black–Scholes–Merton para opções de compra europeias, utilizando dados sintéticos. Busca-se avaliar a precisão da aproximação obtida em diferentes condições de mercado e comparar os resultados com a solução analítica, discutindo as potencialidades e limitações dessa abordagem baseada em aprendizado de máquina para precificação de opções financeiras.

¹Mestrando em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, andre.p.gomes@edu.ufes.br;

²Mestrando em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, gabriel.i.barboza@edu.ufes.br;

³Mestrando em Física, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, geovani.v.silva@edu.ufes.br;

⁴Mestrando em Física, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, vitor.p.silva@edu.ufes.br;

⁵Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, luciac@inf.ufes.br.

⁶Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, isaac.santos@ufes.br.

Método e Metodologia

Esta pesquisa tem natureza quantitativa e aplicada, com foco no desenvolvimento e avaliação de modelos baseados em *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) para a resolução da equação de Black–Scholes–Merton (RAISSI; PERDIKARIS; KARNIADAKIS, 2019). Utilizam-se dados sintéticos derivados da solução analítica para opções de compra europeias, a fim de avaliar o desempenho do método em diferentes condições de mercado.

Os dados foram gerados com parâmetros fixos: preço de exercício (*strike*) $K = 40$, taxa livre de risco $r = 0,05$, volatilidade $\sigma = 0,20$, maturidade $T = 1$ ano e preço máximo do ativo no domínio $S_{\max} = 160$. O problema é descrito pela EDP de Black–Scholes–Merton em termos do *time-to-maturity* τ (BLACK; SCHOLES, 1973):

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV, \quad (1)$$

com condição inicial $V(S, 0) = \max(S - K, 0)$ e condições de contorno

$$V(0, \tau) = 0, \quad (2)$$

$$V(S_{\max}, \tau) \approx S_{\max} - Ke^{-r(T-\tau)}. \quad (3)$$

A PINN utilizada é uma rede *feedforward* $f_{\theta}(S, \tau)$ com três camadas ocultas de 64 neurônios e função de ativação tanh, treinada sobre amostras internas do domínio (N_f), pontos de fronteira e iniciais (N_{BC}) e pontos de observação (N_{obs}) obtidos da solução analítica. A função de perda total combina termos associados ao resíduo da EDP, às condições de fronteira/iniciais e às observações:

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_{\text{PDE}} + \mathcal{L}_{\text{BC}} + \mathcal{L}_{\text{Obs}},$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{PDE}} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left[\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \frac{\partial V}{\partial S} + rV \right]_i^2 \quad (4)$$

representa o termo associado ao resíduo da EDP,

$$\mathcal{L}_{\text{BC}} = \frac{1}{N_{\text{BC}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{BC}}} [V(S_j, \tau_j) - g(S_j, \tau_j)]^2$$

corresponde às condições de contorno e iniciais, e

$$\mathcal{L}_{\text{Obs}} = \frac{1}{N_{\text{obs}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{obs}}} [V(S_k, \tau_k) - V_k^{\text{obs}}]^2$$

refere-se ao termo das observações.

O treinamento é realizado em dois estágios: otimização inicial com Adam (KINGMA; BA, 2014) e refinamento com L-BFGS-B (LI; CHEN; KARANIKAS, 2020), ambos implementados na biblioteca DeepXDE (LU et al., 2021). A avaliação considera o *Root Mean Square Error* (RMSE) em uma malha (S, τ) e mapas de erro absoluto, fornecendo medidas quantitativas e visuais da qualidade da solução aproximada.

Discussão e Resultados

Os experimentos com dados sintéticos da equação de Black–Scholes–Merton evidenciam o bom desempenho da abordagem proposta. A Figura 1 apresenta a comparação entre a solução analítica e a obtida via PINN em diferentes instantes até a maturidade, mostrando excelente concordância. A Figura 2 ilustra a superfície do preço da opção aprendida pela PINN, que reproduz corretamente o *payoff* teórico.

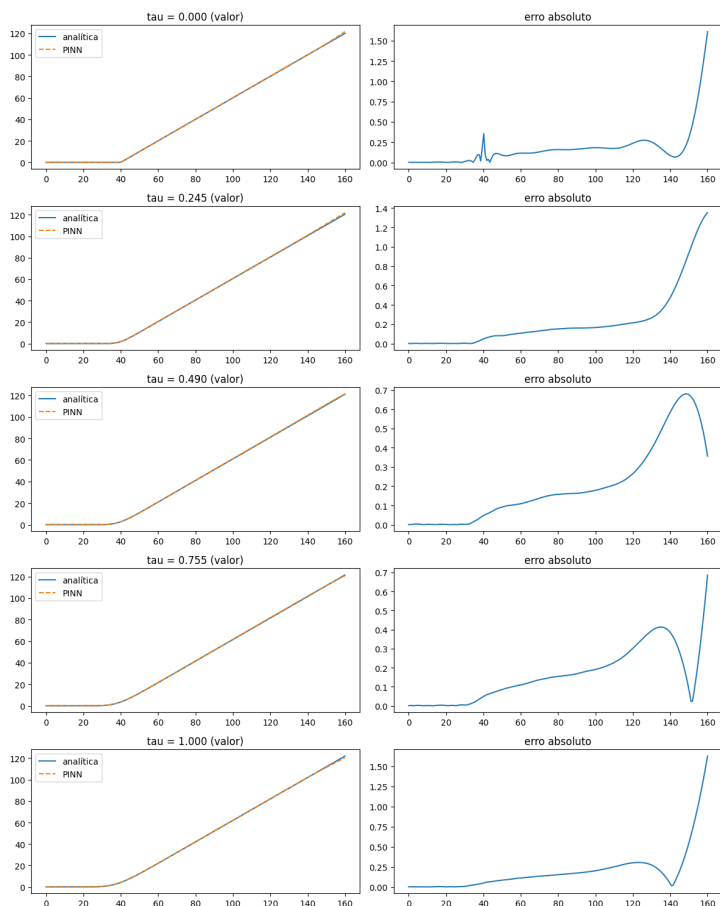


Figura 1: Comparação entre solução analítica e PINN em instantes distintos de τ . Fonte: Autor (2025).

Superfície do preço da opção - Modelo Black-Scholes

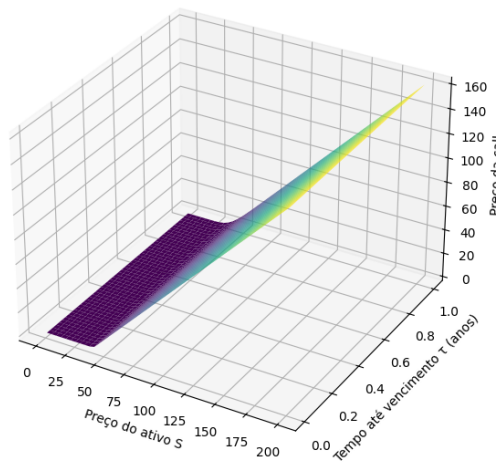


Figura 2: Superfície do preço da opção aprendida pela PINN. Fonte: Autor (2025).

A análise do erro absoluto (Figura 3) revela baixa discrepância na maior parte do domínio, com leve aumento apenas próximo ao limite superior do ativo, região com menor densidade de pontos de treinamento. A evolução da perda (Figura 4) confirma a eficácia do processo de otimização, com rápida redução inicial e estabilização em patamar baixo, sem indícios de sobreajuste.

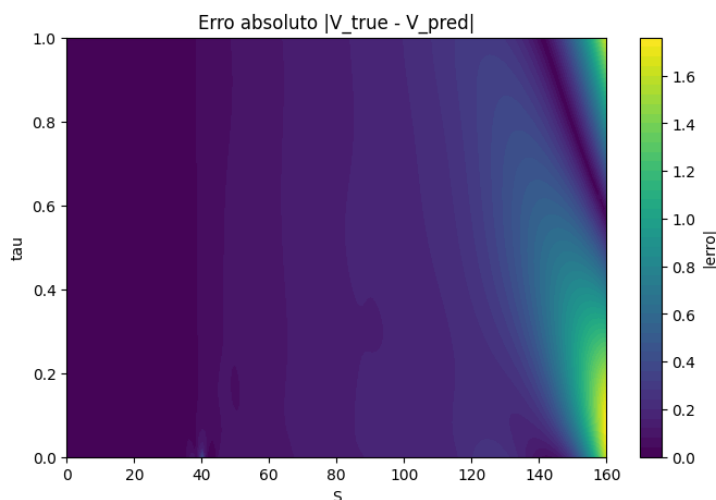


Figura 3: Mapa do erro absoluto entre solução analítica e PINN. Fonte: Autor (2025).

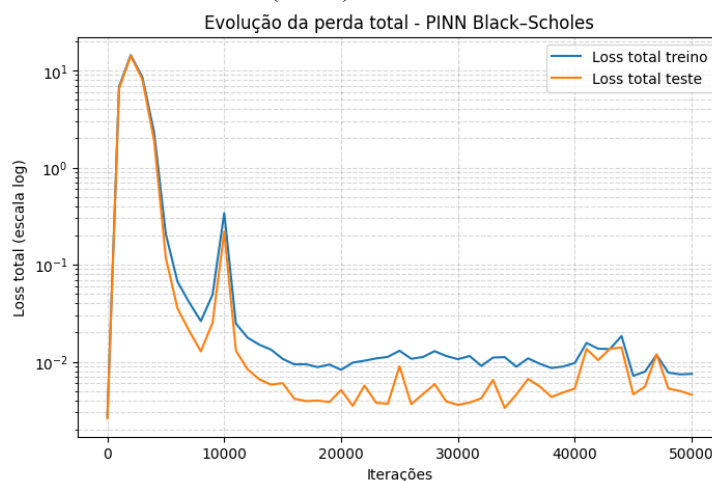


Figura 4: Evolução da perda (treino e teste) nos experimentos com dados sintéticos. Fonte: Autor (2025).

O erro médio quadrático (RMSE) sobre toda a grade foi de 0.3026, considerado satisfatório para o problema avaliado. Esse resultado demonstra que a PINN capturou com precisão a dinâmica da equação de Black-Scholes-Merton, validando seu potencial como ferramenta para precificação de derivativos em cenários onde dados analíticos ou de mercado são escassos. No entanto, o treinamento das PINNs apresenta custo computacional elevado, pois envolve o cálculo de derivadas de ordem superior e o uso de malhas densas de pontos no domínio e no contorno.

De forma geral, os resultados reforçam a viabilidade das PINNs para aproximar soluções de EDPs em finanças quantitativas, oferecendo um caminho promissor para futuras aplicações em dados reais e modelos com maior complexidade.¹

¹Código disponível em <https://github.com/andrepazgomes/PINN-Black-Scholes-Merton>.

Considerações Finais

Os resultados obtidos evidenciam que a abordagem proposta reproduziu com precisão a solução analítica da equação de Black–Scholes–Merton, confirmando a viabilidade das *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) para a precificação de opções financeiras. Destacam-se como principais vantagens a incorporação direta das restrições diferenciais no processo de aprendizado e a capacidade de generalização mesmo em cenários com alta variabilidade, característica relevante para o mercado financeiro.

Entretanto, desafios importantes foram identificados, como o elevado custo computacional para atingir convergência estável e a sensibilidade a hiperparâmetros, funções de ativação e estratégia de amostragem, aspectos que demandam investigação adicional.

Como trabalhos futuros, pretende-se aplicar a metodologia a dados reais e estendê-la a modelos mais complexos, incluindo opções com múltiplos ativos e características adicionais. Em síntese, os resultados reforçam o potencial das PINNs como ferramenta promissora na interseção entre finanças quantitativas e aprendizado profundo, oferecendo uma base sólida para estudos e aplicações futuras.

Referências

BLACK, F.; SCHOLE, M. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973.

HULL, J. Options, Futures, and Other Derivatives. 10. ed. Boston: Pearson, 2018.

KARAPANTZOS, D.; PAPALITSAS, C. Physics-informed neural networks in option pricing under stochastic volatility models. Computational Economics, v. 58, p. 1–30, 2021.

KINGMA, D. P.; BA, J. Adam: A method for stochastic optimization. In: International Conference on Learning Representations (ICLR). San Diego: [s.n.], 2014.

LI, X.; CHEN, J.; KARANIKAS, N. On the convergence of physics informed neural networks. arXiv preprint, arXiv:2006.04545, 2020.

LU, L. et al. Deepxde: A deep learning library for solving differential equations. SIAM Review, v. 63, n. 1, p. 208–228, 2021.

MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. The Bell Journal of Economics and Management Science, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973.

RAISSI, M.; PERDIKARIS, P.; KARNIADAKIS, G. E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. Journal of Computational Physics, v. 378, p. 686–707, 2019.