

INTRODUÇÃO DE INTEGRAIS DEFINIDAS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ingrith dos Anjos Silva
Universidade Estadual de Londrina
ingrith.anjos.silva@uel.br

Jessica Aparecida Borssoi Zanquim
Universidade Estadual de Londrina
jessica.zanquim@uel.br

Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina
bruno@uel.br

Eixo Temático: 6 - Resolução de problemas

Resumo: O presente trabalho tem como propósito apresentar um relato de experiência de duas pós-graduandas no decorrer da aplicação de uma tarefa, no contexto da disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: Elementos de Cálculo e Análise Real na perspectiva de pesquisas em Educação Matemática do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Essa tarefa, envolvendo o cálculo de áreas, tinha o objetivo de introduzir o conceito de Integrais Definidas por meio da Resolução de Problemas e foi desenvolvida pela primeira e segunda autoras baseando-se em um artigo que envolvia a apresentação do conceito de Integrais Definidas por meio de tarefas exploratórias. Tal experiência possibilitou a construção do conceito pretendido e a percepção da importância de abordagens de ensino que permitam essa construção de modo que os estudantes possam participar ativamente das aulas, especificamente em cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Cálculo Diferencial e Integral; Integrais Definidas; Resolução de Problemas.

1 Introdução

A experiência relatada neste trabalho ocorreu no ano de 2025 na disciplina “Tópicos Especiais em Educação Matemática: Elementos de Cálculo e Análise Real na perspectiva de pesquisas em Educação Matemática” do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL), ministrada pelo terceiro autor deste artigo.

Um dos propósitos da disciplina é o de refletir sobre a falta de articulação do que é estudado em Análise Real e Cálculo Diferencial e Integral I em cursos de

licenciatura em Matemática, em relação ao ensino de Matemática na Educação Básica e assim, pensar em possíveis articulações, além de repensar a forma com que a Análise Real e o Cálculo são apresentados aos licenciandos em Matemática. Para isso, durante as aulas foram estudados textos que evidenciaram o ensino de Análise Real e de Cálculo nas licenciaturas, assim como propostas de ensino dos conteúdos relacionados a essas disciplinas na perspectiva de pesquisas em Educação Matemática.

Um dos trabalhos propostos aos estudantes foi o de estudar e apresentar um artigo, que foi direcionado pelo professor e, posteriormente, baseando-se em tarefas retratadas nele, realizar a aplicação de uma tarefa junto aos demais alunos da turma. Desta maneira, este trabalho tem como objetivo relatar a experiência de duas pós-graduandas no desenvolvimento de uma tarefa com o objetivo de introduzir o conceito de Integrais Definidas por meio da Resolução de Problemas e retratar as reflexões oriundas dessa experiência.

2 Aspectos teóricos

Antes de iniciar a disciplina, imaginávamos que ela seria muito complexa, tal qual foram as disciplinas de Análise Real e Cálculo Diferencial e Integral I durante a graduação. Após as conversas norteadas pelo professor, percebemos que pode-se ensiná-las e, acima de tudo, aprendê-las de uma maneira diferente da dos padrões tradicionais, na qual são expostos conteúdos, que geralmente são copiados *ipsis litteris* dos livros, exposição de exemplos e exercícios de reprodução, que tem como intuito a mecanização de um conceito. A consequência disso é que os alunos geralmente não conseguem ver sentido naquilo que estão aprendendo.

Nesse sentido, Paulin e Ribeiro (2021), investigaram aspectos dos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, com foco no conceito de Integral Definida, em um ambiente de ensino exploratório que favorece a construção de diferentes percursos de aprendizagem pelos estudantes, mostrando que nesse sentido, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral não precisa ser ensinado apenas com foco em conceitos e exercícios de fixação, mas sim, trazendo sentido aos alunos para aquilo que estão fazendo.

Trevisan e Mendes (2018) apontam que aspectos como altos índices de reprovação, baixo rendimento acadêmico e dificuldades enfrentadas pelos alunos no Cálculo Diferencial e Integral têm recebido atenção especial por parte de professores e pesquisadores da área de Educação Matemática. Além disso, esses autores argumentam que

Pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática apontam que abordagens de ensino de Matemática promissoras são aquelas em que os alunos trabalham de forma colaborativa, com tarefas que envolvam a resolução de problemas integrando recursos tecnológicos a fim de propiciar a reflexão, promover a interação interativa/dialógica e que tenham potencial para facilitar a aprendizagem dos estudantes (Trevisan; Mendes, 2018, p. 210).

Além disso, esses autores propuseram uma abordagem para o Cálculo Diferencial e Integral baseada na resolução de tarefas, considerando os aportes da Educação Matemática e distanciando-se de práticas centradas exclusivamente no livro didático. Para os autores, essa perspectiva favorece a atuação ativa dos estudantes, por meio do trabalho em grupo e da resolução de tarefas não precedidas de exemplos, que promovem discussões e favorecem a construção conceitual.

Com isso, entendemos que uma das metodologias que pode ser utilizada para trabalhar com aulas em perspectivas contrárias ao modelo da aula tradicional, é a Resolução de Problemas. Essa metodologia de ensino, tal como apresentam Onuchic e Allevato (2009), utiliza o problema como ponto de partida, onde este é tomado como guia para o processo de aprendizagem, sendo a construção do conhecimento realizada a partir da busca por sua resolução.

Nessa perspectiva, utilizamos a Resolução de Problemas para aplicarmos nossa tarefa com os estudantes de pós-graduação que estavam matriculados na disciplina e que eram ou já atuaram como professores em algum momento, pois esse tipo de atividade é importante para o desenvolvimento profissional de professores de matemática, já que podem ser promovidas reflexões sobre a metodologia de ensino de determinado conteúdo a ser estudado, como no caso da introdução de conceitos de Integrais Definidas em aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

3 Aspectos Metodológicos

Conforme mencionado anteriormente, a experiência relatada ocorreu no ano

de 2025 na disciplina “Tópicos Especiais em Educação Matemática: Elementos de Cálculo e Análise Real na perspectiva de pesquisas em Educação Matemática”. Compunham a turma da disciplina, sete licenciados em Matemática, incluindo a primeira e segunda autoras deste relato. Dos sete alunos presentes, três estavam cursando o Mestrado, três estavam cursando o Doutorado e um dos estudantes havia se matriculado como aluno especial de Doutorado.

Um dos trabalhos propostos aos estudantes foi o de estudar e apresentar um artigo, que foi direcionado pelo professor e, posteriormente, baseando-se nas tarefas retratadas nele, propor uma tarefa aos demais alunos da turma, e, de acordo com o tema do artigo, ou fazer uma relação com o ensino da Análise Real ou do Cálculo Diferencial e Integral com o ensino da Matemática na Educação Básica, ou desenvolver algum conteúdo dessas disciplinas, de modo que fuja da maneira convencional na qual são apresentadas: exposição do conteúdo, seguido por exemplos e exercícios de reprodução.

Para a realização deste trabalho, foi feita uma organização dos alunos em grupos, onde três destas apresentações seriam feitas em duplas e, uma das apresentações seria feita de maneira individual. As duplas e os artigos apresentados foram definidos pelo professor da disciplina, sendo uma delas formada pela primeira e segunda autoras deste trabalho, que doravante serão denominadas como estudantes de pós-graduação. Essa escolha foi feita pois ambas vivenciaram durante a licenciatura em Matemática uma experiência parecida com a que era retratada no artigo que apresentaram, enquanto alunas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na qual tinham como professor o terceiro autor deste relato.

O artigo apresentado pelas pós-graduandas tem como título “Oportunidades de aprendizagem do conceito de integral definida por meio de tarefas matemáticas” de autoria de Juliana França Viol Paulin e Alessandro Jacques Ribeiro, publicado no ano de 2021. Nesta proposta, foi desenvolvida e aplicada uma tarefa com os colegas de disciplina, com o propósito de introduzir a Soma de Riemann e a definição de Integral Definida, inspirada nas tarefas desenvolvidas no artigo citado.

Paulin e Ribeiro (2021) apontam que os procedimentos de ensino de Cálculo Diferencial e Integral não têm se manifestado de maneira satisfatória, dessa forma,

assinalam que abordagens que permitam a participação ativa dos estudantes podem colaborar com a aprendizagem desses. Para isso, apresentam uma proposta de ensino utilizando tarefas exploratórias com objetivo de introduzir os conceitos de Soma de Riemann e Integral Definida.

Inspiradas na Tarefa 3 de Paulin e Ribeiro (2021), as pós-graduandas planejaram uma tarefa para ser aplicada com os colegas de disciplina, a fim de que eles pudessem resolvê-la e chegassem a uma aproximação do valor de uma determinada área. A tarefa proposta se encontra a seguir:

Seja f a função definida por $f(x) = x^2 + 1$:

- a) Construa o gráfico da função $f(x)$ no intervalo $[0,4]$;

Um procedimento para o cálculo aproximado da área desta figura é inserção de retângulos com bases de mesma medida abaixo do gráfico da função.

- b) Insira dois retângulos com bases de mesma medida na região limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = 0$ e $x = 4$, e pelo eixo x . E calcule a soma das áreas dos retângulos denominando a soma como S_2 . (Escreva o resultado utilizando-se de $S_2 = (b_1 \cdot h_1) + (b_2 \cdot h_2)$);
- c) Repita o mesmo procedimento desenvolvido no item b, tomando o número de retângulos igual a quatro.
- d) Repita o procedimento desenvolvido nos itens b e c, tomando o número de retângulos igual a oito.

Figura 1: Tarefa proposta para o cálculo de áreas

Fonte: Os autores baseados em Paulin e Ribeiro (2021).

Optou-se por utilizar a função quadrática $f(x) = x^2 + 1$, pois, de acordo com o relato de Paulin e Ribeiro (2021), ao utilizarem a função $f(x) = x^2$ os estudantes tiveram dificuldade para realizar a inserção dos retângulos na região a qual seria calculada a área, pois o seu ponto mínimo encontrava-se exatamente em zero, logo, a inserção dos retângulos acabava sendo mais difícil de ser visualizada e inserida no gráfico.

4 Apresentação e discussão da experiência

A aula teve início com a apresentação do artigo de Paulin e Ribeiro (2021) pelas estudantes de pós-graduação, que destacaram os aspectos teóricos, contexto, tarefas e resultados do trabalho desenvolvido pelos referidos autores. Durante este momento

houve discussões a respeito do que estava sendo apresentado e o compartilhamento das experiências de todos os presentes na turma.

A maioria dos alunos enfatizaram suas experiências enquanto alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e de como elas foram traumáticas, pois, grande parte deles tiveram aulas no modo tradicional e, quando aprendiam os conceitos dessa disciplina, apenas decoravam para poder fazerem as provas e, que não sabiam o que de fato estava acontecendo naquele conceito, ou seja, não viam sentido naquilo que estavam aprendendo.

Após essas discussões, foi distribuída a tarefa (Figura 1) de forma impressa aos estudantes, em uma folha sulfite e, junto com ela, um papel quadriculado, para que os estudantes pudessem representar o gráfico com maior facilidade. Tínhamos por objetivo trabalhar com a introdução dos conceitos de Soma de Riemann e Integral Definida.

Inicialmente, a tarefa foi desenvolvida pelos estudantes de maneira individual e, posteriormente, foi pedido para que compartilhassem suas resoluções com os demais alunos da turma. Salientamos que os pós-graduandos já sabiam de antemão o objetivo da tarefa, portanto não utilizaram o conceito de Integral Definida para resolvê-la considerando que por meio das suas resoluções seria formalizado o conteúdo.

Após a discussão dos resultados obtidos pelos estudantes, as apresentadoras abordavam como ela poderia ser feita com o auxílio do software GeoGebra.

Para o item “b” da tarefa, foi solicitado que os estudantes calculassem a área abaixo do gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$ e acima do eixo x no intervalo $[0,4]$. Para isso, inicialmente fizeram a substituição dos valores solicitados no intervalo para poder encontrar o valor da área.

Com isso, obtiveram que ao inserir dois retângulos com bases de mesma medida abaixo do gráfico da função e acima do eixo x , as bases medirão 2. A altura dos retângulos será dada pelo valor de $f(x)$ nas extremidades esquerdas dos subintervalos, ou seja, quando $x = 0$ e $x = 2$.

$$\begin{aligned}S_2 &= 2 \cdot (0^2 + 1) + 2 \cdot (2^2 + 1) \\S_2 &= 2 \cdot (0 + 1) + 2 \cdot (4 + 1) \\S_2 &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\S_2 &= 2 + 10 \\S_2 &= 12 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Vale ressaltar que S_2 refere-se a soma das áreas dos dois retângulos solicitados. Esse mesmo valor foi obtido com a utilização do software GeoGebra, como mostra a figura 3:

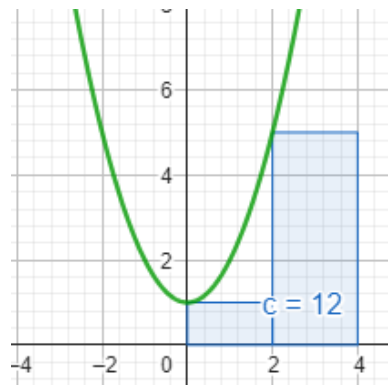


Figura 2: Resolução do item b da tarefa.
Fonte: Os autores.

Para o item “c” os estudantes fizeram a construção de quatro retângulos na região limitada. Ao inserir quatro retângulos com bases de mesma medida abaixo do gráfico da função e acima do eixo x, as bases medirão 1. A altura dos retângulos será dada pelo valor de $f(x)$ nas extremidades esquerdas dos subintervalos, ou seja, quando $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned}S_4 &= 1 \cdot (0^2 + 1) + 1 \cdot (1^2 + 1) + 1 \cdot (2^2 + 1) + 1 \cdot (3^2 + 1) \\S_4 &= 1 \cdot (0 + 1) + 1 \cdot (1 + 1) + 1 \cdot (4 + 1) + 1 \cdot (9 + 1) \\S_4 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 \\S_4 &= 1 + 2 + 5 + 10 \\S_4 &= 18 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Novamente, ressaltamos que S_4 refere-se a soma das áreas dos quatro retângulos. Do mesmo modo que foi feito no item anterior, pode-se obter o resultado da soma das áreas dos quatro retângulos utilizando o software GeoGebra. Para tal, temos:

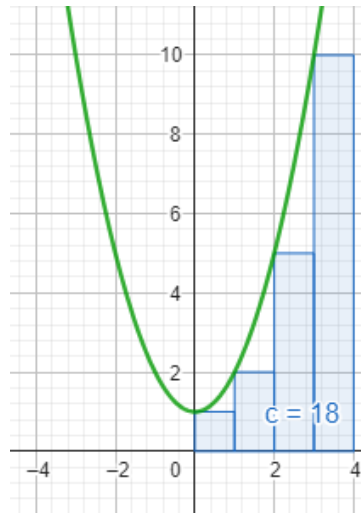


Figura 3: Resolução do item c da tarefa.
Fonte: Os autores.

Por fim, foi desenvolvido o item “d” da tarefa, onde os estudantes fizeram o mesmo processo dos itens anteriores, mas agora, com a inserção de oito retângulos. Ao inserir oito retângulos com bases de mesma medida abaixo do gráfico da função e acima do eixo x, as bases medirão 0,5. A altura dos retângulos será dada pelo valor de $f(x)$ nas extremidades esquerdas dos subintervalos, ou seja, quando $x = 0$, $x = 0,5$, $x = 1$, $x = 1,5$, $x = 2$, $x = 2,5$, $x = 3$ e $x = 3,5$. Sendo assim, temos:

$$S_8 = 0,5 \cdot (0^2 + 1) + 0,5 \cdot (0,5^2 + 1) + 0,5 \cdot (1^2 + 1) + 0,5 \cdot (1,5^2 + 1) + 0,5 \cdot (2^2 + 1) + 0,5 \cdot (2,5^2 + 1) + 0,5 \cdot (3^2 + 1) + 0,5 \cdot (3,5^2 + 1)$$

$$S_8 = 0,5 \cdot (0 + 1) + 0,5 \cdot (0,25 + 1) + 0,5 \cdot (1 + 1) + 0,5 \cdot (2,25 + 1) + 0,5 \cdot (4 + 1) + 0,5 \cdot (6,25 + 1) + 0,5 \cdot (9 + 1) + 0,5 \cdot (12,25 + 1)$$

$$S_8 = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,25 + 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 3,25 + 0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 7,25 + 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot 13,25$$

$$S_8 = 0,5 + 0,625 + 1 + 1,625 + 2,5 + 3,625 + 5 + 6,625$$

$$S_8 = 21,5 \text{ u. a.}$$

Do mesmo modo, ressaltamos que S_8 refere-se a soma das áreas dos oito retângulos e que podemos obter o resultado dessa soma utilizando o software GeoGebra.

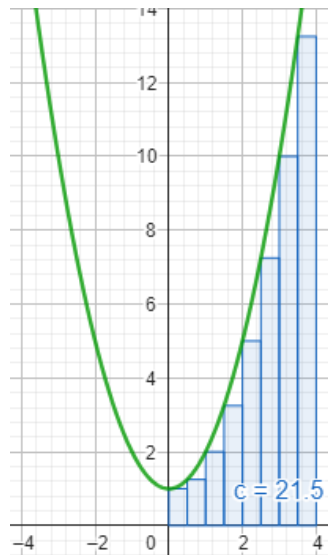


Figura 4: Resolução do item d da tarefa.
Fonte: Os autores.

A partir dessas resoluções, foi discutido com os estudantes que, à medida que inserimos uma quantidade maior de retângulos na área delimitada, melhor será a sua aproximação do valor da área dessa região. Nesse sentido, os questionamos se, de alguma forma, poderíamos escrever as expressões obtidas nos itens anteriores de uma forma genérica.

Após as discussões, as apresentadoras escreveram na lousa as expressões obtidas na resolução das tarefas de uma forma genérica, obtendo:

$$S_2 = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1)$$

$$S_4 = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \Delta x \cdot f(x_2) + \Delta x \cdot f(x_3)$$

$$S_8 = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(x_7)$$

Nas quais Δx representa as medidas das bases dos retângulos e $f(x_i)$ as alturas dos retângulos, com i denotando os índices de x .

Com base nas escritas de S_2 , S_4 e S_8 foi obtida uma expressão para a soma das áreas de n retângulos.

$$S_n = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta x \cdot f(x_1) + \dots + \Delta x \cdot f(x_{n-1})$$

Reescrevendo essa expressão utilizando o símbolo de somatório, obtemos:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) \cdot \Delta x)$$

A partir das resoluções apresentadas e dos comentários dos estudantes foi observado que ao aumentar o número de retângulos os valores foram ficando cada vez mais próximos do valor da área desejada, de forma que ao utilizar oito retângulos a região ficou melhor preenchida do que quando utilizado dois e quatro retângulos. Foi mostrado por meio do software Geogebra que ao aumentar o número de retângulos indefinidamente essa aproximação seria ainda melhor, de maneira que em determinado momento daria a impressão de que toda a região abaixo do gráfico estaria preenchida. Dessa forma, foi utilizado o conceito de Limite de forma que o número de retângulos (n) tendesse ao infinito, escrevendo a área (A) da região da seguinte maneira:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) \cdot \Delta x)$$

Foi evidenciado que a altura dos retângulos foi tomada como o valor de f nas extremidades esquerdas, o que acarretava uma aproximação por falta. Porém poderiam ser tomadas as extremidades direitas, obtendo uma aproximação por excesso, o que foi mostrado utilizando o software Geogebra.

Salientou-se, também, que a altura do i -ésimo retângulo poderia ser tomada como o valor de f em qualquer número o x_i^* no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, nos quais os números $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ são chamados de pontos amostrais (Stewart, 2009). Escrevendo, então, a expressão da área de uma maneira mais geral, como mostrado a seguir:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i^*) \cdot \Delta x)$$

Foi informado que a soma $\sum_{i=1}^n (f(x_i^*) \cdot \Delta x)$ é chamada de Soma de Riemann em homenagem ao matemático Bernhard Riemann.

Posteriormente, foi destacado que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(x_i^*) \cdot \Delta x)$ recebe o nome de Integral Definida. Para tal, a definição de integral definida é dada

Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sejam $x_0 (= a), x_1, \dots, x_n (= b)$ as extremidades desses subintervalos, escolhemos os

pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a **integral definida de f de a a b** é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

desde que este limite exista. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$. (Stewart, 2009, p. 345).

Após a apresentação da definição de Integral Definida a aplicação da tarefa foi finalizada.

5 Considerações finais

Esse relato de experiência teve por objetivo relatar a experiência de duas alunas de pós-graduação ao aplicarem uma atividade para o desenvolvimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I fora dos padrões tradicionais que geralmente são utilizados em cursos de licenciatura em Matemática, no contexto da disciplina “Tópicos especiais em Educação Matemática: Elementos de Cálculo e Análise Real na perspectiva de pesquisas em Educação Matemática” em um programa de pós-graduação stricto sensu paranaense.

As ações realizadas consistiram na elaboração e aplicação de uma tarefa a partir de uma proposta apresentada pelos autores Paulin e Ribeiro (2021) para a introdução dos conceitos de Soma de Riemann e Integral Definida. A metodologia utilizada pelas pós-graduandas esteve à luz da Resolução de Problemas apresentada por Onuchic e Allevato (2009), cujo objetivo central é o de utilizar o problema como ponto de partida, onde este é tomado como guia para o processo de aprendizagem, fazendo com que os estudantes sejam ativos em seu processo de aprendizagem, deixando assim de serem apenas meros espectadores das aulas.

Com as atividades desenvolvidas em sala, percebemos que a utilização de tarefas matemáticas voltadas para o cálculo da área de regiões — delimitadas pelo gráfico de uma função e o eixo x , em um intervalo específico de seu domínio — por meio de perspectivas nas quais os alunos participem ativamente pode contribuir significativamente para que estes compreendam melhor o que estão fazendo. Essa abordagem pode favorecer a construção do conceito de Integral Definida com compreensão, uma vez que por meio do método tradicional de ensino do Cálculo,

baseado apenas em teoria, exemplos e exercícios mecânicos, muitas vezes os alunos tendem apenas a reproduzir procedimentos sem, de fato, entenderem seu significado.

6 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

7 Referências

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, I. (orgs). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 169-187.

PAULIN, J. F. V.; RIBEIRO, A. J. Oportunidades de Aprendizagem do Conceito de Integral Definida por Meio de Tarefas Matemáticas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 10, n. 21, p. 440–462, 2021.

STEWART, J. **Cálculo**: Volume 1. [6. ed.](#) Tradução Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018. DOI: 10.3895/rbect.v11n1.5702