



## MONSTROS MATEMÁTICOS - UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL E SUAS APLICAÇÕES A MODELOS FÍSICOS

Niedja Costa Leal Ferreira<sup>1</sup>; Rodrigo Soares Leandro de Lucena<sup>2</sup>.

### Eixo 2 – Educação Matemática e suas interfaces com outras áreas de conhecimento

**Resumo:** Esta oficina tem como objetivo apresentar os fundamentos da Geometria Fractal e discutir suas aplicações em contextos científicos amplos, com foco na formação inicial de professores e pesquisadores. Fractais são estruturas geométricas que exibem autossimilaridade e complexidade infinita, mesmo originadas por regras simples. Seu estudo tem se mostrado relevante para tornar mais precisa a modelagem de diversos fenômenos físicos. Suas aplicações se fazem úteis em áreas como sistemas caóticos, fronteiras irregulares, descargas elétricas e estruturas naturais como pulmões e sistemas vasculares. A proposta da oficina é introduzir os conceitos básicos da Geometria Fractal à alunos do ensino superior interessados em aprender mais sobre a geometria fractal e suas aplicações nas pesquisas em ciência de fronteira, explorando construções práticas com papel e softwares e discutindo suas aplicações nas mais diversas áreas da ciência. Com abordagem investigativa e dialogada, os participantes serão convidados a reconhecer a presença dos fractais na natureza, refletindo também sobre suas possibilidades didáticas tanto no ensino superior quanto na educação básica.

**Palavras-chave:** Fractais; Teoria do Caos; Ensino de Matemática; Ensino de Física; Formação Docente.

### INTRODUÇÃO

Nesta oficina, visamos apresentar aos estudantes o universo dos que já foram chamados de “Monstros Matemáticos” devido a sua complexidade e características contraintuitivas, promovendo a divulgação desse novo ramo das ciências matemáticas atualmente conhecido por Geometria Fractal, bem como das suas aplicações, especialmente no contexto da pesquisa de fronteira. Fractais são padrões que se repetem em diferentes escalas, como em galhos de árvores, flocos de neve e sistemas de rios. Eles mostram como formas complexas podem surgir de regras simples e autorreplicáveis.

A Geometria Fractal surge como alternativa perante as limitações da Geometria Euclidiana para a modelagem de fenômenos físicos, se aproximando mais das formas e situações que encontramos na natureza. Estruturas como nuvens, costas e fronteiras, sistemas nervosos, turbulência em fluidos, não se encaixam nos modelos baseados na geometria clássica que aprendemos na escola. Os fractais, ao contrário das formas básicas, permitem descrever essas estruturas por suas características, como a autossimilaridade e dimensão fracionária, que fogem da nossa intuição.

<sup>1</sup> Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) • Graduando do curso Física - Licenciatura • Caruaru, Pernambuco (PE), Brasil • [niedja.cferreira@ufpe.br](mailto:niedja.cferreira@ufpe.br) • ORCID 0009-0001-5361-3543

<sup>2</sup> Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) • Graduando do curso Física - Licenciatura • Caruaru, Pernambuco (PE), Brasil • [rodrigo.soaresl@ufpe.br](mailto:rodrigo.soaresl@ufpe.br) • ORCID 0009-0004-1898-0366





A exemplo, na Física, o estudo da geometria fractal tem implicações em áreas como dinâmica de sistemas não lineares, física computacional e modelagem de estruturas naturais, e como consequência da interdisciplinariedade científica, seu uso se faz relevante e inovador no aperfeiçoamento de pesquisas recentes em áreas como a econofísica, a física-médica, e a meteorologia que já vem colhendo os frutos dos avanços na área desde que Lorenz aplicou seus estudos dos atratores estranhos (Gleick, 1989).

Esta oficina tem como objetivo introduzir o público interessado no estudo da Geometria Fractal, mostrando as vantagens das suas aplicações aos modelos de pesquisa científica, destacando o potencial formativo e investigativo da Geometria Fractal em sala de aula, e atrair os estudantes interessados a pesquisar nessa área com aplicações tão promissoras.

## OBJETIVOS

Nossas intenções estão em proporcionar uma experiência significativa, unindo conceitos matemáticos clássicos aos mais contemporâneos e mostrar os benefícios que uma visão menos “euclidiana” da natureza pode ter numa percepção mais assertiva dos fenômenos futuramente trabalhados na pesquisa acadêmica.

- Apresentar uma introdução aos conceitos fundamentais da Geometria Fractal;
- Discutir suas aplicações à modelagem de contextos científicos;
- Oferecer atividades didáticas com construções manuais e digitais de fractais.

## METODOLOGIA

Inicialmente justificaremos a necessidade da modelagem baseada em fractais perante as restrições da geometria euclidiana, visto que suas formas básicas não descrevem vários dos sistemas e fenômenos mais complexos encontrados na natureza, onde os fractais são muito mais eficientes para otimizar nossos modelos fenomenológicos (Mandelbrot, 1982). Trabalharemos o contexto histórico no qual os chamados “Monstros Matemáticos” foram surgindo (e sendo deixados de lado) nos problemas matemáticos mais complexos do século XX, até serem estudados e caracterizados por Benoît Mandelbrot, que os rebatizou de “Fractais”. (Mandelbrot, 1982; Gleick, 1989; Prigogine, 2002).

Depois vamos lembrar bem rapidamente conceitos introdutórios de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), de limites, ciclos e infinitos para um melhor entendimento das estruturas recursivas e dos padrões encontrados nos fractais, e de séries como





a Sequência de Fibonacci para uma melhor contextualização dos exemplos e aplicações que serão mostradas a seguir. A partir dessa introdução, os participantes serão instigados a fazer uma reflexão sobre a natureza dos fractais, e suas características: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensões fracionárias (Falconer, 2003).

Mostraremos a construção e as principais características dos fractais mais conhecidos. Começaremos com o mais simples, o Conjunto de Cantor (Figura 1); a Ilha de Von Koch (Figura 4) e a formação dos flocos de neve; Triângulo de Sierpinski e sua relação com o Triângulo de Pascal para os coeficientes dos produtos notáveis; Esponja de Menger, um fractal tridimensional que se forma pelos mesmos princípios do Triângulo de Sierpinski; O Conjunto de Julia (Figura 3), suas características singulares dentre os fractais e sua relação com o plano complexo. Seguiremos a exposição mostrando alguns fractais que envolvem assuntos matemáticos já conhecidos como o Teorema Pitagórico (Figura 2), o Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci.

Será realizada uma atividade prática e interativa usando papel e régua para construção do Triângulo de Sierpinski, para tornar tangível a ideia de redução de escala. Acreditamos que a construção dessas formas à mão torna mais eficiente a assimilação do surgimento dos padrões de um fractal por meio de repetição.

**Figura 1** – Conjunto de Cantor

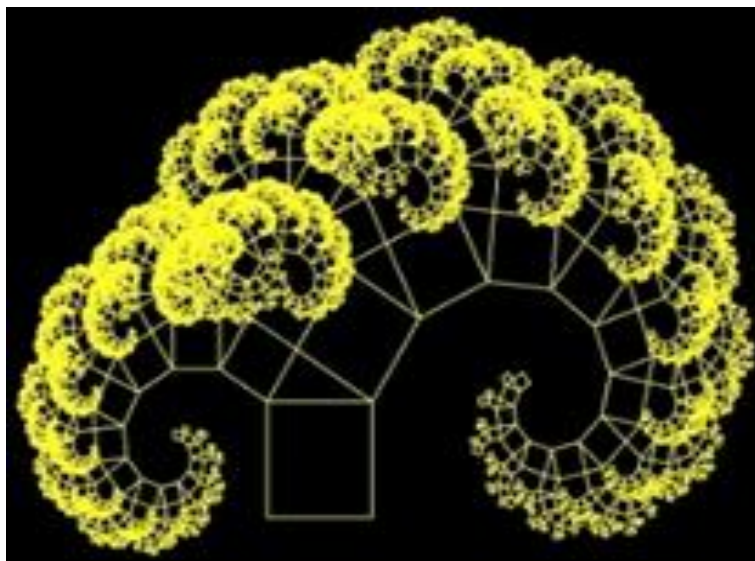


Fonte: Disponível em: <https://onlinetools.com/math/generate-cantor-set> . Acesso: 9 abr. 2025



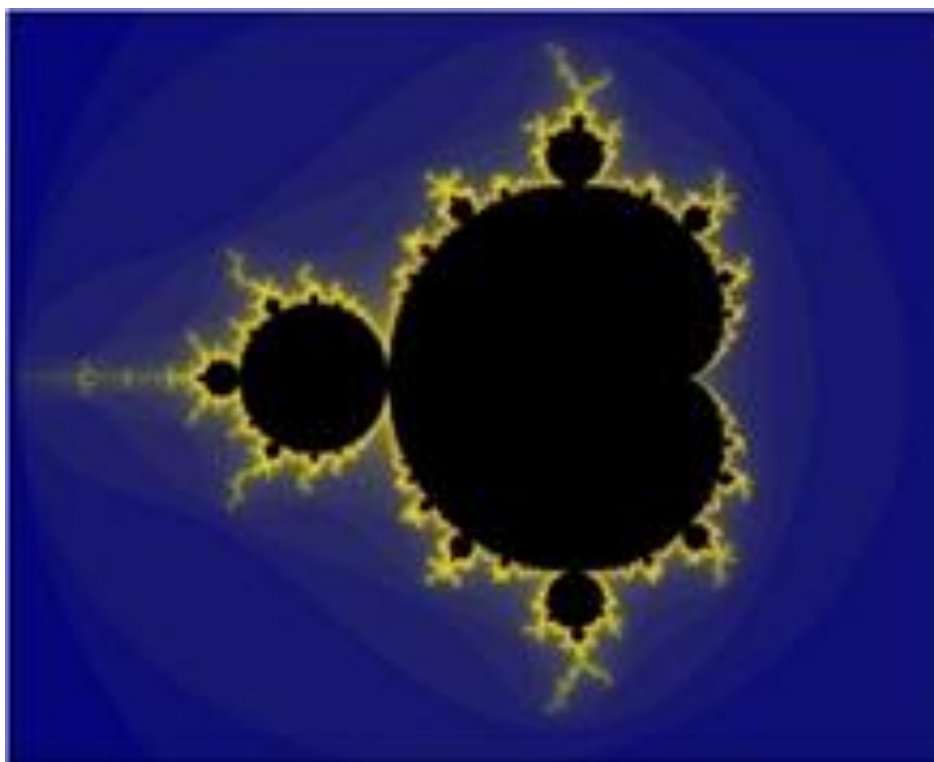


Figura 2 – Fractal gerado através do Teorema Pitagórico



Fonte: Disponível em: <https://onlinetools.com/math/generate-cantor-set> Acesso: 9 abr. 2025

Figura 3 – Conjunto de Julia



Fonte: Disponível em <https://mandel.gart.nz/>. Acesso: 9 abr. 2025





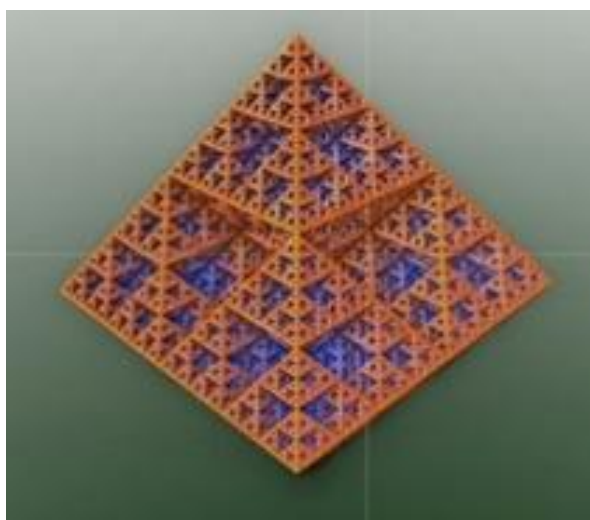
Figura 4 – Ilha de Von Koch



Fonte: Disponível em: <https://onlinetools.com/math/generate-cantor-set> Acesso: 9 abr. 2025

Apresentaremos uma abordagem visual de fractais famosos com o apoio do software Mandelbulber, que possibilitará a visualização de fractais em 3D, e os simuladores online *Onlinetools* e *Mandelbulber Gart Gallery* para a visualização em 2D, para proporcionar o encantamento dos participantes com as possibilidades visuais e matemáticas dos fractais (Marczak, 2023).

Figura 5 – Gaxeta de Sierpinski

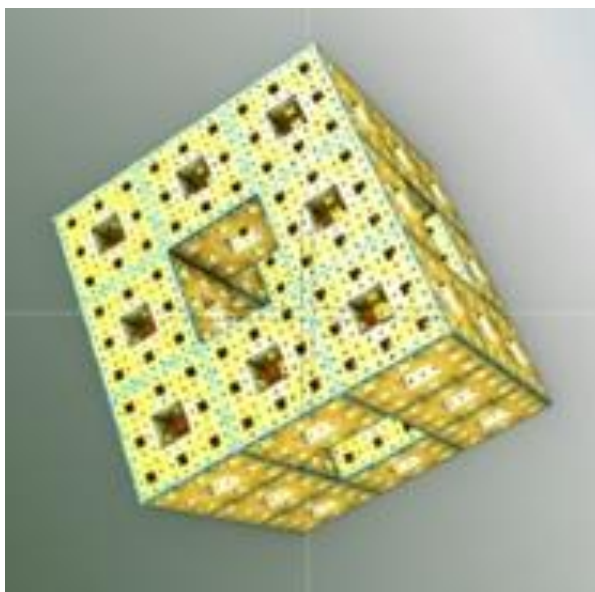


Fonte: Elaborado pelos autores (2025), a partir de predefinições disponíveis no software *Mandelbulber*.



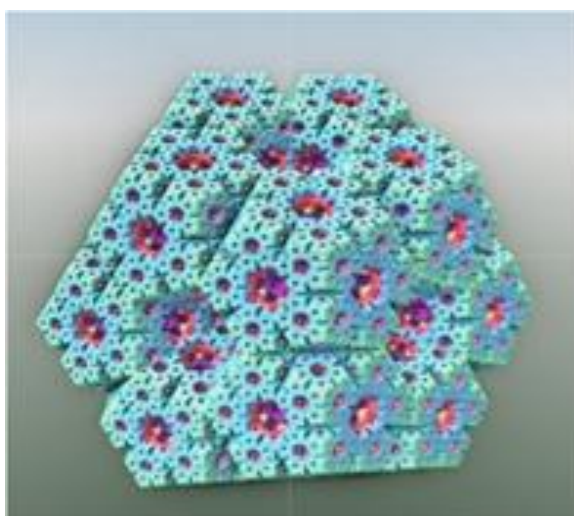


Figura 6 – Tapete de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelos autores (2025), a partir de predefinições disponíveis no software *Mandelbulber*.

Figura 7 – Dodecaedro de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelos autores (2025), a partir de predefinições disponíveis no software *Mandelbulber*.

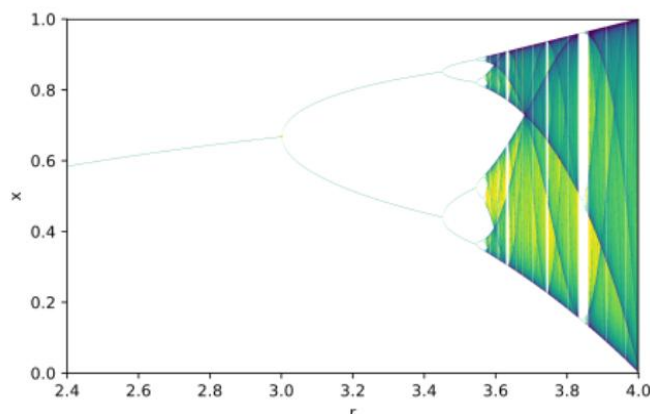
Por fim, discutiremos os problemas matemáticos mais famosos que cuja resolução avançou com o advento dos estudos dos fractais e as aplicações da geometria fractal a modelos físicos (principalmente em física computacional, passando pelas áreas de sistemas caóticos, distribuição de galáxias), modelos biológicos (em especial na fisiologia das plantas e no corpo humano, passando pelas aplicações médicas) e em sistemas econômicos (Gleick, 1989; Prigogine, 2002; Pati, 2025). Apresentaremos um exemplo de Diagrama de Bifurcação do Mapa





Logístico, que é uma ferramenta visual que demonstra como o comportamento de um sistema dinâmico muda à medida que um parâmetro (no caso, a taxa de crescimento 'r') varia.

Figura 8 – Exemplo de Diagrama de Bifurcação de Mapa logístico

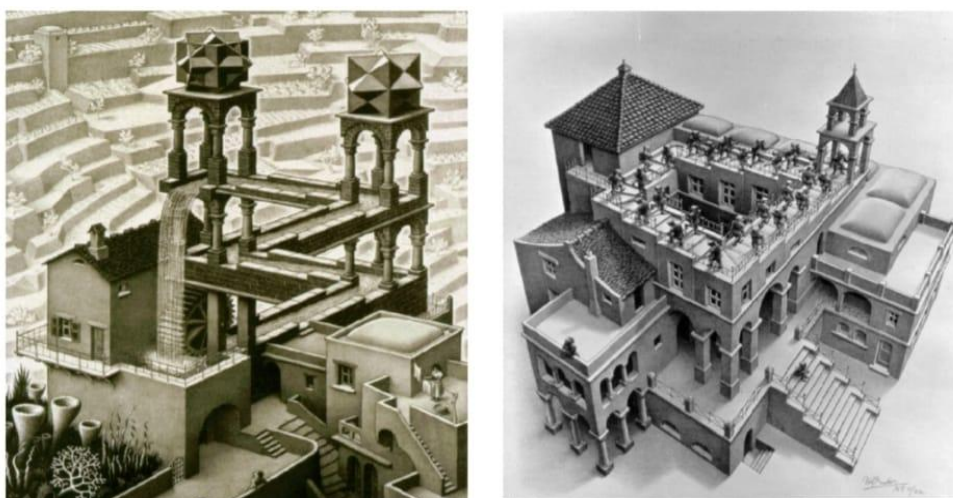


Fonte: Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13369-023-08313-7> Acesso: 24 ago. 2025

E encerraremos propondo uma roda de diálogo sobre as possíveis abordagens desses conteúdos ao ensino básico (Cortês, 2014), tanto na Matemática quanto na Física, na Biologia e em outras áreas do conhecimento (Barbora, 2005).

Aproveitaremos a oportunidade para mostrar aos presentes onde já podem ter visto fractais na cultura: em filmes (Frozen, Doutor Estranho, Efeito Borboleta, Bob Esponja); nas artes (obras de Leonardo Da Vinci e de M. C. Escher).

Figura 9 – Algumas obras de M. C. Escher: (a) Queda de água; (b) Subindo e Descendo



Fonte: Disponível em [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com). Acesso: 9 abr. 2025.





O tempo estimado para a apresentação e as atividades desta oficina deve se concluir entre 1 hora e 1 hora e 30 minutos.

## PÚBLICO-ALVO

Estudantes de Graduação em cursos de Ciências Exatas e da Natureza, em particular dos cursos de licenciatura, que tenham noções básicas de limites e de infinitos, interessados em aprender mais sobre a geometria fractal e suas aplicações nas pesquisas em ciência de fronteira.

## RECURSOS NECESSÁRIOS

Serão de Responsabilidades dos Apresentadores:

- Computador (notebook);
- Acesso a softwares de simulação (Mandelbulber);
- Acesso a simuladores de fractais online;
- Papel quadriculado, régua e esquadros para uso dos inscritos;

De Responsabilidade da Organização:

- Projetor com HDMI;
- Espaço para trabalho em grupo e discussão, de preferência com mesas.

## AGRADECIMENTOS

Não poderíamos deixar de declarar nossas gratulações ao nosso professor orientador Gustavo Camelo Neto<sup>3</sup>, por sua paciência e seus ensinamentos ao longo da concepção do projeto, bem como à equipe do Laboratório Multiusuário de Materiais e Dispositivos (LAMAD)<sup>4</sup> da Universidade Federal de Pernambuco – Campus do Agreste (UFPE – CAA), da qual fazemos parte, pelo suporte ao decorrer da pesquisa realizada.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

CORTES, I. R. C. *Geometria Fractal no Ensino Médio: teoria e prática*. 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em

<sup>3</sup> Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1196031119840419>

<sup>4</sup> Site do Laboratório Multiusuário de Materiais e Dispositivos LAMAD: <https://sites.ufpe.br/lamad-cao/>





Matemática (PROFMAT-UNIRIO), Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

FALCONER, K. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.

GARTNER, M. *Mandelbulber gallery*. Disponível em: <http://www.mandelbulber.com/gallery/>. Acesso em: 9 abr. 2025.

GLEICK, J. *Caos: a criação de uma nova ciência*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1989.

MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1982.

MARCZAK, K. *Mandelbulber v2: 3D fractal rendering software*. 2023. Disponível em: <http://www.mandelbulber.com/>. Acesso em: 9 abr. 2025.

ONLINETOOLS.COM. *Generate cantor set – online tools*. Disponível em: <https://onlinetools.com/>. Acesso em: 9 abr. 2025.

PATI, S. S.; SUBUDHI, U. *Stability analysis of a multi-area renewable system and frequency control with improved chaotic Harris Hawk Optimization algorithm*. Arabian Journal for Science and Engineering, v. 49, p. 6531-6550, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s13369-023-08313-7>. Acesso em: 23 ago. 2025.

PRIGOGINE, I. *As leis do caos*. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

