

Subaditividade Forte da Entropia de von Neumann: A Desigualdade Triangular da Teoria da Informação Quântica

Nícolas Silva

Resumo—Este artigo explora a subaditividade forte da entropia de von Neumann, uma propriedade fundamental da teoria da informação quântica. Analisamos sua analogia com a desigualdade triangular da geometria clássica, posicionando-a como uma regra de consistência para a incerteza e correlação em sistemas quânticos. Abordamos a definição da entropia de von Neumann, a desigualdade da subaditividade e a subaditividade forte, destacando sua importância para a consistência da teoria da informação. Os resultados obtidos ressaltam como esta propriedade garante que a incerteza de sistemas quânticos compostos obedece a uma lógica de composição, um conceito crucial para a correção de erros e o processamento de informações quânticas. A conclusão reforça a importância da subaditividade forte para a compreensão e o desenvolvimento de tecnologias quânticas.

Palavras-Chave—Entropia de von Neumann; subaditividade forte; informação quântica; entrelaçamento; desigualdade triangular.

Abstract—This paper explores the strong subadditivity of von Neumann entropy, a fundamental property of quantum information theory. We analyze its analogy to the classical triangular inequality, positioning it as a rule of consistency for uncertainty and correlation in quantum systems. We address the definition of von Neumann entropy, the subadditivity inequality, and strong subadditivity, highlighting their importance for the consistency of information theory. The results obtained emphasize how this property ensures that the uncertainty of composite quantum systems follows a logical composition, a crucial concept for quantum error correction and information processing. The conclusion reinforces the importance of strong subadditivity for understanding and developing quantum technologies.

Keywords—Von Neumann entropy; strong subadditivity; quantum information; entanglement; triangular inequality.

I. INTRODUÇÃO

A teoria da informação quântica utiliza a entropia de von Neumann para quantificar a incerteza e a desordem em estados quânticos, indo além da entropia de Shannon da teoria clássica para incorporar o conceito de entrelaçamento. A subaditividade forte da entropia, embora complexa, é um princípio fundamental que serve como um pilar de consistência para a teoria. Este trabalho visa posicionar a pesquisa no campo da informação quântica, apresentar o problema de como a incerteza se comporta em sistemas compostos e justificar a relevância de se estudar a subaditividade forte como uma analogia da desigualdade triangular.

Nícolas Silva, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul Campo Grande-UFMS, e-mail: nicolas.silva@ufms.br.

A. Entropia e Desigualdade Triangular

A entropia de von Neumann de um estado quântico ρ é definida por:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho), \quad (1)$$

onde tr é o traço do operador. Essa entropia quantifica a incerteza do estado. Um estado puro, sem incerteza, tem entropia zero, enquanto estados mistos têm entropia maior que zero.

A **desigualdade da subaditividade** simples para dois subsistemas A e B é dada por:

$$S(A, B) \leq S(A) + S(B) \quad (2)$$

Essa desigualdade, análoga à regra de composição da geometria euclidiana, afirma que a incerteza total de um sistema composto não pode ser maior que a soma das incertezas individuais de seus subsistemas.

II. SUBADITIVIDADE FORTE

A **subaditividade forte** é a propriedade central que conecta a entropia quântica à ideia de desigualdade triangular. Para três sistemas, A, B e C, a desigualdade é expressa como:

$$S(A, B, C) + S(B) \leq S(A, B) + S(B, C) \quad (3)$$

A prova formal desta desigualdade, uma das mais importantes na teoria da informação quântica, foi apresentada por Elliott H. Lieb e Mary Beth Ruskai [2]. Essa desigualdade garante a consistência da teoria da informação quântica, servindo como uma condição para que a informação mútua quântica, uma medida de correlação, não seja negativa. Isso implica que a incerteza total de um sistema não pode aumentar quando a incerteza de um subsistema é eliminada.

III. CONCLUSÕES

Concluímos que os objetivos do trabalho foram cumpridos. A hipótese de que a subaditividade forte atua como uma desigualdade triangular para a incerteza em sistemas quânticos foi confirmada. As dificuldades metodológicas se concentraram na complexidade matemática da subaditividade forte. O significado dos resultados reside na sua capacidade de fornecer uma base sólida para a teoria da informação quântica, permitindo o desenvolvimento de tecnologias que dependem da manipulação de estados quânticos, como a computação quântica e a criptografia.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Programa de Educação Tutorial da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e à própria Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

REFERÊNCIAS

- [1] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] E. H. Lieb e M. B. Ruskai, "A Proof of the Strong Subadditivity of Quantum Mechanical Entropy," *Journal of Mathematical Physics*, v. 14, n. 12, pp. 1938–1941, 1973.