

Localização de Anderson em cadeias de spin para transferência perfeita de estado

Rogério O. dos Santos, Eduardo K. Soares e Fabiano M. Andrade

Resumo— Este trabalho investiga o fenômeno da localização de Anderson em cadeias de spin projetadas para transferência perfeita de estado (TPE). Por meio da análise da fidelidade da transferência, avalia-se o impacto da desordem no transporte quântico. Os resultados mostram que cadeias com TPE são robustas contra perturbações fracas, mas apresentam supressão significativa do transporte em regimes de desordem intermediária, sobretudo em sistemas longos. Observou-se também diferença entre injeções de excitação no centro e nas extremidades, evidenciando a sensibilidade destas últimas à desordem, o que confirma a manifestação da localização de Anderson.

Palavras-Chave— Localização de Anderson, fidelidade, desordem.

Abstract— This work investigates Anderson localization phenomena in spin chains designed for perfect state transfer (PST). Through the analysis of transfer fidelity, the impact of disorder on quantum transport is evaluated. The results show that chains with PST are robust against weak perturbations but exhibit significant transport suppression under intermediate disorder regimes, especially in long systems. A difference was also observed between excitations injected at the center and at the ends of the chain, with the latter being more sensitive to disorder, thus confirming the manifestation of Anderson localization.

Keywords— Anderson localization, fidelity, disorder.

I. INTRODUÇÃO

A transmissão de estados quânticos entre dois pontos é uma tarefa fundamental para viabilizar a comunicação em processadores e redes de informação quântica. Dependendo da tecnologia disponível, esta tarefa pode ser realizada de diferentes formas. Nesse contexto, as cadeias de spins têm atraído significativa atenção por sua capacidade de atuar como canais eficientes tanto para a transferência de informação quântica [1,2] quanto para a geração e distribuição de emaranhamento [3]. Essas cadeias podem ser vistas como *condutos* ideais para o transporte de estados quânticos e oferecem um cenário propício para o estudo da degradação do transporte causada pela localização de Anderson [4].

Neste trabalho, estudamos cadeias de spin-1/2 com dimensão finita arquitetadas para transferência perfeita de estado (TPE). Investigamos estas cadeias sob efeito de desordem fora da diagonal principal do Hamiltoniano do sistema. Isto nos permite demonstrar efeitos como localização espacial e efeitos retardantes do transporte e relacionar esses efeitos a localização de Anderson.

Rogério O. dos Santos, Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: rogeriooods00@gmail.com; Eduardo K. Soares, Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: edukso2002@gmail.com; Fabiano M. Andrade, Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: fmandrade@uepg.br.

A. Localização de Anderson

A localização de Anderson foi prevista em 1958, para explicar resultados experimentais de relaxamento anormalmente longo de spins em semicondutores, sendo então associada à transição metal-isolante. O teorema proposto por P.W.Anderson diz que, em densidades suficientemente baixas, o transporte não ocorre e as funções de onda exatas estão localizadas em uma pequena região do espaço [5].

Esse fenômeno está intimamente relacionado à presença de desordem no sistema, que pode inibir a propagação de estados quânticos, levando à sua localização espacial. Desde que foi proposto seu impacto tem sido estendido a uma ampla gama de sistemas e fenômenos físicos.

O objetivo deste trabalho é entender e demonstrar a presença da localização de Anderson em cadeias de spin-1/2.

II. HAMILTONIANO

A dinâmica natural de uma cadeia de spins com N sítios, incluindo desordem, pode ser descrita por um Hamiltoniano independente do tempo da seguinte forma

$$H = \sum_{i=1}^N \epsilon_i |1\rangle\langle 1|_i + \sum_{i=1}^{N-1} J_{i,i+1} [|1\rangle\langle 0|_i \otimes |0\rangle\langle 1|_{i+1} + |0\rangle\langle 1|_i \otimes |1\rangle\langle 0|_{i+1}], \quad (1)$$

onde, ϵ_i são as energias de excitação única independentes do sítio i , com desvios dessa condição sendo devidos à desordem ou erros, $J_{i,i+1}$ são os acoplamentos entre dois sítios vizinhos i e $i + 1$ definidos por

$$J_{i,i+1} = J_0 \sqrt{i(N-i)} \quad (2)$$

Em qualquer sistema, haverá um valor máximo para a intensidade de acoplamento spin-spin, independente do comprimento N , fixado por um valor característico da realização física particular dos spins. Para lidar com essa restrição prática, mantemos o valor máximo de acoplamento $J_{\text{máx}} = 1$ constante enquanto variamos N . Assim, $J_{\text{máx}}$ é a nossa unidade de energia. Então o valor máximo para a intensidade de acoplamento spin-spin é alcançado no meio da cadeia, sendo assim para cadeias de comprimento par temos,

$$J_0 = 2J_{\text{máx}}/N \quad (3)$$

já para cadeias de comprimento ímpar temos,

$$J_0 = \frac{2J_{\text{máx}}}{N} \sqrt{1 - 1/N} \quad (4)$$

III. FIDELIDADE

Uma avaliação útil do desempenho da cadeia TPE é a fidelidade, correspondente ao mapeamento de um estado inicial $|\psi_{\text{ini}}\rangle$ em um estado desejado $|\psi_{\text{fin}}\rangle$ após um tempo t , por meio da dinâmica unitária do sistema. Esta operação é dada pela expressão

$$F = |\langle \psi_{\text{fin}} | e^{-iHt/\hbar} | \psi_{\text{ini}} \rangle|^2, \quad (5)$$

onde H é o Hamiltoniano independente do tempo que descreve a dinâmica natural de uma cadeia de N sítios.

A TPE ocorre quando a fidelidade entre o estado inicial e o estado desejado atinge 1. Aqui, nos concentramos em uma cadeia de spin com somente uma excitação. Nesse caso, o tempo para que a excitação vá de uma ponta à outra da cadeia é $t_M = \frac{\pi\hbar}{2J_0}$, conhecido como tempo de espelhamento (mirroring time) [6]. A periodicidade completa é $t_S = 2t_M$.

IV. DESORDEM

Para simular desordem na diagonal principal em cadeias com diferentes valores de N , escalamos a intensidade da desordem por $J_{\text{máx}}$ e definimos,

$$\epsilon_i = EJ_{\text{máx}}d_i, \quad (6)$$

onde d_i é um número aleatório distribuído uniformemente entre 0 e 1, e E é um parâmetro adimensional que controla a intensidade da desordem. Cadeias TPE não perturbadas garantem transferência perfeita não apenas entre os extremos, mas entre qualquer par de spins equidistantes do centro, devido à simetria da cadeia.

A excitação total é preservada pelo Hamiltoniano, mesmo com desordem, de modo que o sistema permanece no subespaço de excitação única

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^N c_i(t) |0\rangle_1 \dots |1\rangle_i \dots |0\rangle_N \quad (7)$$

resolvemos a evolução temporal utilizando métodos numéricos. Quando consideramos desordem, utilizamos 20 realizações e calculamos a média dos valores das observáveis de interesse.

V. FIDELIDADE DE TRANSFERÊNCIA

Nos sistemas ideais sem desordem, as cadeias TPE funcionam como fios perfeitos, garantindo que uma excitação injetada em uma extremidade chegue à outra com fidelidade igual a um no tempo característico t_M . Entretanto, para valores maiores de N , a fidelidade decai exponencialmente com o comprimento da cadeia, além de sofrer influência da intensidade da desordem. Esse decaimento poderia, em princípio, ocorrer apenas devido a atrasos no tempo de chegada da excitação, e não por uma supressão completa do transporte. Por isso, investigamos a fidelidade máxima de transferência em uma janela temporal ampla (de duração $4.5t_M$), garantindo que o efeito analisado seja de fato a supressão do transporte e não apenas um deslocamento temporal.

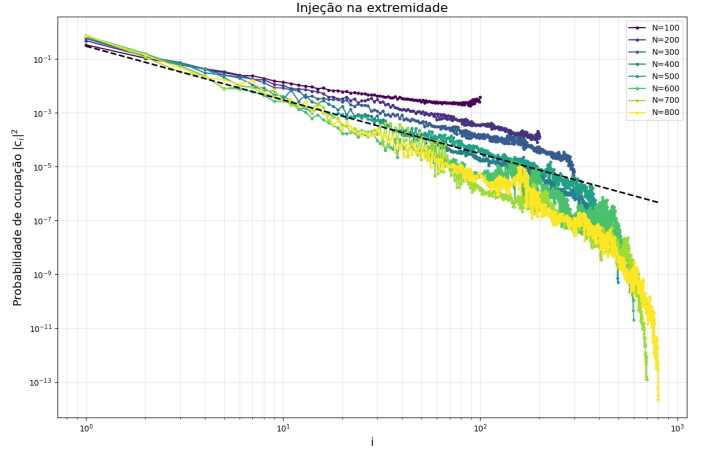


Fig. 1: Probabilidades efetivas de ocupação em regime estacionário em função do sítio 1 da cadeia, para uma faixa de comprimentos de cadeia N de 100 a 800 e desordem de intensidade $E = 1$.

VI. RESULTADOS

Nas Figs. 1 e 2 apresentamos os resultados obtidos para as probabilidades de ocupação usando a excitação é injetada no sítio 1, para comparação, uma linha crítica dada por i^{-2} foi adicionada ao gráfico (com um fator de normalização 0,6), para quando é injetada no sítio $N/2$ foi adicionada ao gráfico uma linha crítica dada por $[i - (N/2) + 1]^{-2}$ (com um fator de normalização 0,3). Essas linhas fornecem o limite aceito para a localização de Anderson [7] no limite $N \rightarrow \infty$. Identificando tudo abaixo do limite como localizado e tudo acima como não localizado.

VII. CONCLUSÕES

Concluímos que cadeias com $N \approx 500$ ou mais exibem localização de Anderson para uma excitação inicialmente na extremidade da cadeia, enquanto cadeias com a excitação inicialmente centralizada não atingem essa condição para nenhum N na faixa investigada.

Cadeias de spin unidimensionais projetadas para transferência perfeita de estado (TSE) apresentam uma dualidade

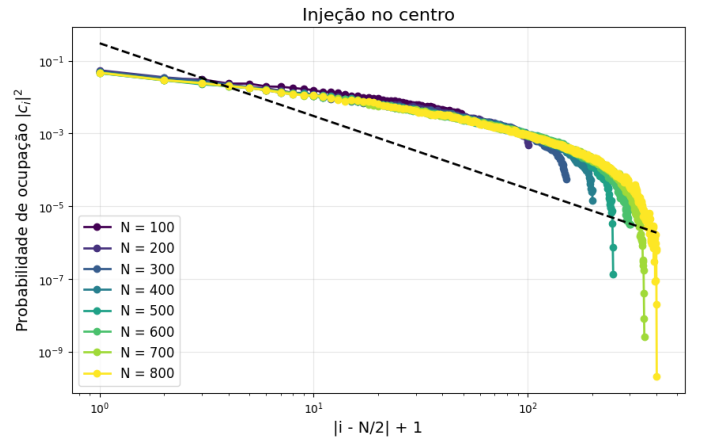


Fig. 2: Probabilidades efetivas de ocupação em regime estacionário em função do sítio $N/2$ da cadeia, para uma faixa de comprimentos de cadeia N de 100 a 800 e desordem de intensidade $E = 1$.

importante: embora sejam robustas contra pequenas perturbações, elas passam a sofrer supressão significativa do transporte quando submetidas a níveis intermediários de desordem ($E \sim 1$), especialmente em cadeias mais longas.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, Código de Financiamento 001), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ). F.M.A. agradece o suporte do CNPq sob concessão No. 313124/2023-0.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Ronke, M.P. Estarellas, I. D'Amico, T.P. Spiller e T. Miyadera, "Anderson localisation in spin chains for perfect state transfer," *Eur. Phys. J. D*, v. 70, pp. 189, Maio 2016.
- [2] P. W. Anderson, "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices," *Physical Review*, v. 109, pp. 1492–1504, Março 1958.
- [3] A. Bayat, L. Banchi, S. Bose e P. Verrucchi, "Initializing an unmodulated spin chain to operate as a high-quality quantum data bus," *Physical Review A*, v. 83, Junho 2011.
- [4] M. Christandl, N. Datta, T. C. Dorlas, A. Ekert, A. Kay e A. J. Landahl, "Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks," *Physical Review A*, v. 71, Março 2005.
- [5] T. P. Spiller, I. D'Amico, e B. W. Lovett, "Robust quantum entanglement generation and generation-plus-storage protocols with spin chains," *Physical Review A*, v. 95, Abril 2017.
- [6] T.P. Spiller, I. D'Amico e B.W. Lovett, "Entanglement distribution for a practical quantum-dot-based quantum processor architecture," *New J. Phys.*, v. 9, Janeiro 2007.
- [7] C. Guan e X. Guan, "A brief introduction to Anderson Localization," *Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology*, Maio 2019.