

# Oscilador de Dirac em $(2 + 1)$ dimensões e o seu mapeamento no Modelo Anti-Jaynes-Cummings

Matheus D. Moro, Thiago T. Tsutsui e Fabiano M. Andrade

**Resumo**—Neste trabalho, analisamos o modelo do Oscilador de Dirac, o qual é obtido pela introdução de um acoplamento não-mínimo na Equação de Dirac de uma partícula livre. A análise da dinâmica desse Hamiltoniano em  $(2 + 1)$  dimensões permite traçar um paralelo do efeito *Zitterbewegung* com as oscilações de Rabi e realizar o mapeamento do Oscilador de Dirac em  $(2 + 1)$  dimensões no modelo Anti-Jaynes-Cummings.

**Palavras-Chave**—Mecânica Quântica Relativística, Óptica Quântica, Modelo Jaynes-Cummings e Anti-Jaynes-Cummings.

**Abstract**—In this work, we analyzed the Dirac Oscillator model, which is obtained by introducing a non-minimal coupling onto the free particle Dirac equation. The analysis of this Hamiltonian's dynamics in  $(2 + 1)$  dimensions allows us to make a parallel between the *Zitterbewegung* and the Rabi oscillations, and realize the mapping of the Dirac Oscillator  $(2 + 1)$  onto the Anti-Jaynes-Cummings model

**Keywords**—Relativistic Quantum Mechanics, Quantum Optics, Jaynes and Anti-Jaynes-Cummings model.

## I. INTRODUÇÃO

O Oscilador de Dirac (OD) foi concebido para ser um equivalente do oscilador harmônico simples (OHS) para a mecânica quântica relativística, sendo proposto pela primeira vez por Itô *et al.* em 1967 [1]; posteriormente, foi estudado com mais profundidade por Mochinsky e Szczepaniak em 1989 [2]. Conexões entre esse sistema e sistemas ópticos já foram investigadas antes em [3]. Em especial, vamos focar na dinâmica do Oscilador de Dirac em  $(2 + 1)$  dimensões (OD  $(2 + 1)$ ) e no seu mapeamento no modelo Anti-Jaynes-Cummings (AJC), que pode ser usado para simulações em íons aprisionados [4]. Além disso, a conexão do OD com óptica quântica pode permitir que obtenhamos novos *insights* da mecânica quântica relativística. Isso pode, eventualmente, auxiliar no entendimento do modelo JC, que possui aplicações em computação quântica [5].

Matheus Diniz Moro, Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: matheus-dinizmr01@gmail.com; Thiago Takaji Tsutsui, Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: takajitsutsui@gmail.com; Fabiano Manoel de Andrade, Departamento de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Ciências/Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa-PR, e-mail: fman-drade@uepg.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, Código de Financiamento 001), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ). F.M.A. agradece o suporte do CNPq sob concessão No. 313124/2023-0.

## II. OSCILADOR DE DIRAC

A Equação de Dirac para uma partícula livre é dada por

$$\hat{H}_{livre} |\Psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = (c\hat{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\beta}mc^2) |\Psi\rangle, \quad (1)$$

onde  $|\Psi\rangle$  é um spinor de quatro componentes, que descreve uma partícula relativística de spin-1/2,  $\hbar$  é a constante de Planck reduzida,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $m$  é a massa de repouso da partícula,  $\hat{\mathbf{p}}$  é o operador momento linear,  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  são as matrizes de Dirac, de dimensão  $4 \times 4$  [6]. Essas matrizes, por sua vez, seguem a Álgebra de Clifford

$$\begin{aligned} \{\hat{\alpha}_j, \hat{\alpha}_k\} &= 2\delta_{jk}\mathbb{I}_4, \\ \{\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}\} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Para obter o Hamiltoniano do OD começamos com duas exigências [7]:

- 1) O Hamiltoniano deve ser linear tanto na posição quanto no momento;
- 2) No limite não-relativístico, a equação deve recuperar o Hamiltoniano do OHS.

Assim, fazemos o seguinte o acoplamento não-mínimo

$$\hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} - im\omega\hat{\beta}\hat{\mathbf{r}}, \quad (3)$$

em que  $\omega$  representa a frequência do oscilador e  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\mathbf{r}}$  comutam. A Eq. (1) se torna

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = [c\hat{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - im\omega\hat{\beta}\hat{\mathbf{r}}) + \hat{\beta}mc^2] |\Psi\rangle. \quad (4)$$

O termo introduzido tem esse formato para que equação continue invariante por transformações de *gauge*. Além do mais, a presença de  $\hat{\alpha}$  multiplicado pelo termo introduzido garante que o Hamiltoniano permaneça hermitiano [7].

Fazendo a decomposição do spinor em suas componentes componentes  $|\Psi\rangle := [|\chi\rangle, |\phi\rangle]^T$  e tomando o limite não-relativístico, obtemos a seguinte equação para uma das componentes do spinor

$$\hat{H} |\chi\rangle = \left( \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2 - \mathbb{I}_2 \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{2\omega}{\hbar}\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right) |\chi\rangle. \quad (5)$$

Observamos que na Eq. (5), surgem termos relacionados ao OHS com a adição de mais dois termos. O terceiro termo é relacionado a um deslocamento no espectro de energia, enquanto o último é relacionado com um forte acoplamento spin-órbita [2].

### III. DINÂMICA DO OSCILADOR DE DIRAC EM $(2 + 1)$ DIMENSÕES

No OD em  $(2 + 1)$ , as matrizes de Dirac podem ser representadas da seguinte maneira [4]:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_x &= \hat{\sigma}_x, \\ \hat{\alpha}_y &= \hat{\sigma}_y, \\ \hat{\beta} &= \hat{\sigma}_z,\end{aligned}\quad (6)$$

onde  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  e  $\hat{\sigma}_z$  são as matrizes de Pauli, que respeitam a relação de comutação:  $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k] = 2i\varepsilon_{j k p}\hat{\sigma}_p$ . O Hamiltoniano em (4) se torna

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = [c(\hat{\sigma}_x \hat{p}_x + \hat{\sigma}_y \hat{p}_y) - im\omega c(\hat{\sigma}_x \hat{x} + \hat{\sigma}_y \hat{y})\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z mc^2] |\Psi\rangle. \quad (7)$$

O spinor agora é representado por duas componentes, escritas como  $|\Psi(t)\rangle = [|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle]^T$ .

Para termos entendimento completo da dinâmica, devemos encontrar os autovalores e autovetores do nosso Hamiltoniano. Então, usando a nova representação de spinor, a Eq. (7) pode ser escrita como o seguinte par de equações acopladas:

$$\begin{aligned}(E - mc^2) |\psi_1\rangle &= c[(\hat{p}_x + im\omega \hat{x}) - i(\hat{p}_y + im\omega \hat{y})] |\psi_2\rangle, \\ (E + mc^2) |\psi_2\rangle &= c[(\hat{p}_x - im\omega \hat{x}) + i(\hat{p}_y - im\omega \hat{y})] |\psi_1\rangle.\end{aligned}\quad (8)$$

Para encontrar a solução das equações acopladas (8), nós introduzimos os seguintes operadores de criação e aniquilação quirais

$$\begin{aligned}\hat{a}_r &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y), & \hat{a}_r^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger), \\ \hat{a}_l &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y), & \hat{a}_l^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger),\end{aligned}\quad (9)$$

onde o subíndice  $l$  denota *left* e o subíndice  $r$  denota *right*.

O momento angular orbital na direção  $z$  pode ser expresso em termos desses operadores quirais como [4]

$$\hat{L}_z = \hbar(\hat{a}_r^\dagger \hat{a}_r - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l). \quad (10)$$

Isso nos leva a uma interpretação física desses operadores: eles criam e aniquilam *quanta* de momento angular de quiralidades opostas [4]. Podemos reescrever as equações acopladas (8) em termos dos operadores  $\hat{a}_l^\dagger$  e  $\hat{a}_l$ . Desta forma,

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= i \frac{2mc^2 \sqrt{\xi}}{E - mc^2} \hat{a}_l^\dagger |\psi_2\rangle, \\ |\psi_2\rangle &= -i \frac{2mc^2 \sqrt{\xi}}{E + mc^2} \hat{a}_l |\psi_1\rangle,\end{aligned}\quad (11)$$

em que  $\xi := \hbar\omega/mc^2$  controla o limite não-relativístico do sistema: quando  $\xi \ll 1$ , obtemos o caso não-relativístico. Essas equações podem ser simultaneamente diagonalizadas escrevendo o spinor em termos da base quiral esquerda

$$|n_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_l!}} (\hat{a}_l^\dagger)^{n_l} |0\rangle, \quad (12)$$

onde  $n_l = 0, 1, 2, \dots$  [4]. É válido notar que isso é possível porque os operadores de quiralidade seguem a mesma álgebra

que os operadores usuais de aniquilação e criação. Assim, ao desacoplar as equações em (8) e usar a Eq. (12), obtemos

$$\begin{aligned}(E^2 n_l - m^2 c^4) |n_l\rangle &= 4m^2 c^4 \xi n_l |n_l\rangle, \\ (E^2 n_l' - m^2 c^4) |n_l'\rangle &= 4m^2 c^4 \xi (1 + n_l') |n_l'\rangle.\end{aligned}\quad (13)$$

O espectro de energia pode ser obtido a partir das equações acima e é dado por

$$E_{n_l} = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4\xi n_l}. \quad (14)$$

Assim, obtemos também os autoestados normalizados

$$\begin{aligned}|+E_{n_l}\rangle &= \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{E_{n_l} + mc^2}{2E_{n_l}}} |n_l\rangle \\ \mp i \sqrt{\frac{E_{n_l} - mc^2}{2E_{n_l}}} |n_l - 1\rangle \end{pmatrix}, \\ |-E_{n_l}\rangle &= \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{E_{n_l} - mc^2}{2E_{n_l}}} |n_l\rangle \\ \pm i \sqrt{\frac{E_{n_l} + mc^2}{2E_{n_l}}} |n_l - 1\rangle \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (15)$$

onde o número quântico é restrito a  $n_l = 1, 2, \dots$  [4].

Os autoestados podem ser escritos de maneira completa, ou seja, incluindo os spinores de Pauli  $\{|\chi_\uparrow\rangle, |\chi_\downarrow\rangle\}$  de duas componentes:

$$\begin{aligned}|+E_{n_l}\rangle &= \pm \mu_{n_l} |n_l\rangle |\chi_\uparrow\rangle \mp i \nu_{n_l} |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle, \\ |-E_{n_l}\rangle &= \pm \nu_{n_l} |n_l\rangle |\chi_\uparrow\rangle \pm i \mu_{n_l} |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle,\end{aligned}\quad (16)$$

em que  $\mu_{n_l} := \sqrt{\frac{E_{n_l} + mc^2}{2E_{n_l}}}$  e  $\nu_{n_l} := \sqrt{\frac{E_{n_l} - mc^2}{2E_{n_l}}}$  são coeficientes reais. Dessa expressão, podemos notar que os autoestados de energia apresentam emaranhamento entre os graus de liberdade do spin e do momento angular orbital.

Suponha que o nosso estado inicial seja dado por

$$|\Psi(0)\rangle = |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle, \quad (17)$$

que, usando as equações anteriores, pode ser reescrito como

$$|\Psi(0)\rangle = i\nu_{n_l} |+E_{n_l}\rangle - i\mu_{n_l} |-E_{n_l}\rangle. \quad (18)$$

Podemos observar da Eq. (18) que há uma superposição entre componentes estados de energias positiva e negativa, uma interferência que caracteriza o efeito *Zitterbewegung* [6]. Esse efeito foi simulado com sucesso no caso da Equação de Dirac em  $(1+1)$  dimensões e com o observável posição associada a um íon aprisionado [8].

A evolução temporal desse estado inicial é dada por

$$|\Psi(t)\rangle = i\nu_{n_l} |+E_{n_l}\rangle e^{-i\phi_{n_l} t} - i\mu_{n_l} |-E_{n_l}\rangle e^{i\phi_{n_l} t}, \quad (19)$$

em que  $\phi_{n_l} := \frac{E_{n_l}}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1 + 4\xi n_l}$  descreve a frequência das oscilações. Escrevendo esse estado em função dos spinors de Pauli, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle &= \pm \sqrt{\frac{4\xi n_l}{1 + 4\xi n_l}} \text{sen}(\omega_{n_l} t) |n_l\rangle |\chi_\uparrow\rangle \\ &\pm \left[ \cos(\omega_{n_l}) + \frac{i}{1 + 4\xi n_l} \text{sen}(\omega_{n_l}) \right] |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle.\end{aligned}\quad (20)$$

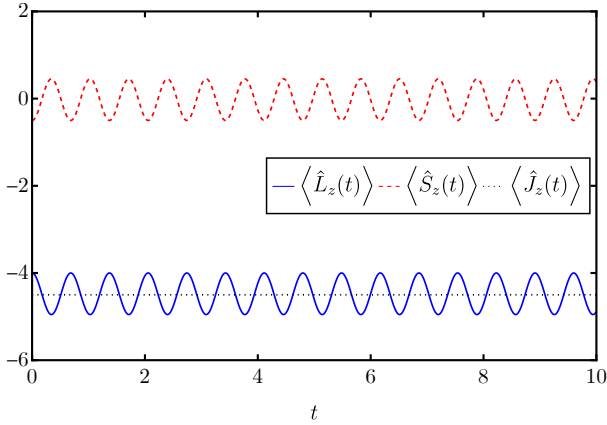


Fig. 1. Evolução temporal dos observáveis  $\langle \hat{L}_z(t) \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_z(t) \rangle$  e  $\langle \hat{J}_z(t) \rangle$  para o estado inicial  $|\Psi(0)\rangle = |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle$ , considerando  $\hbar = m = c = 1$ ,  $n_l = 5$  e  $\xi = 1$ .

É possível observar que há uma dinâmica oscilatória entre os estados  $|n_l\rangle |\chi_\uparrow\rangle$  e  $|n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle$ : o estado inicial evolui de tal maneira que um *quanta* spin é transferido para o momento angular orbital [4].

A dinâmica presente na Eq. (20) é similar às oscilações atômicas de Rabi que ocorrem em sistemas modelados pelo modelo Jaynes-Cummings (JC). No entanto, aqui elas não ocorrem pela dinâmica entre o campo eletromagnético quantizado e o átomo, mas sim pela interferência entre os estados de energias positiva e negativa, isto é, ocorrem pelo efeito *Zitterbewegung* [4]. Para ilustrar essa dinâmica, calculamos os valores esperados dos operadores  $\hat{L}_z$  (momento angular orbital na direção  $z$ ),  $\hat{S}_z$  (spin na direção  $z$ ) e  $\hat{J}_z$  (momento angular total na direção  $z$ ):

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z(t) \rangle &= -(n_l - 1)\hbar - \frac{4\xi n_l}{1 + 4\xi n_l} \hbar \sin^2 \phi_{n_l} t, \\ \langle \hat{S}_z(t) \rangle &= -\frac{\hbar}{2} + \frac{4\xi n_l}{1 + 4\xi n_l} \hbar \sin^2 \phi_{n_l} t, \\ \langle \hat{J}_z(t) \rangle &= \hbar \left( \frac{1}{2} - n_l \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Da Fig. 1 e das equações (21), fica claro que o spin e o momento angular orbital possuem um comportamento ondulatório, enquanto o momento angular total é constante. Isso decorre do fato de o momento angular orbital comutar com o Hamiltoniano, o que o torna uma constante do movimento e deixa o sistema, que esse Hamiltoniano descreve, invariante por rotações em torno do eixo  $z$ .

Como já discutido antes, essas oscilações são consequências da natureza relativística do nosso sistema. No limite não-relativístico,  $\xi \ll 1$ , essas oscilações se tornam bem pequenas:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z(t) \rangle &= -(n_l - 1)\hbar - 4\xi n_l \hbar \sin^2 \Phi_{n_l} t + \mathcal{O}(\xi^2), \\ \langle \hat{S}_z(t) \rangle &= -\frac{\hbar}{2} + 4\xi n_l \hbar \sin^2 \Phi_{n_l} t + \mathcal{O}(\xi^2), \end{aligned}$$

em que  $\Phi_{n_l} := mc^2(1 + 2\xi n_l)/\hbar$ . A dinâmica deles está ilustrada na Fig. 2. Fica evidente também que nesse limite

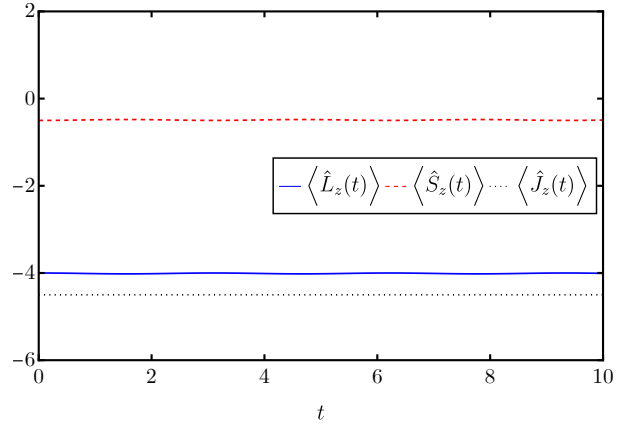


Fig. 2. Evolução temporal dos observáveis  $\langle \hat{L}_z(t) \rangle$ ,  $\langle \hat{S}_z(t) \rangle$  e  $\langle \hat{J}_z(t) \rangle$  para o estado inicial  $|\Psi(0)\rangle = |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle$ , considerando  $\hbar = m = c = 1$ ,  $n_l = 5$  e  $\xi = 0,001$ .

as oscilações do efeito *Zitterbewegung* praticamente desaparecem.

Podemos escrever o estado inicial como uma sobreposição dos estados número, que caracteriza o estado coerente. A motivação por trás disso é a possibilidade de fazer esse procedimento para íons aprisionados [4]. Então, obtemos a expressão

$$|\Psi(0)\rangle = e^{-|\zeta|^2/2} \sum_{n_l=0}^{\infty} \frac{\zeta^{n_l}}{\sqrt{n_l!}} |n_l\rangle |\chi_\downarrow\rangle. \quad (22)$$

Nesse caso, o valor esperado dos observáveis de interesse aqui são dados por

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_z(t) \rangle &= -\hbar |\zeta|^2 - \hbar \sum_{n_l=0}^{\infty} \frac{4\xi (n_l + 1) |\zeta|^{2n_l} e^{-|\zeta|^2}}{[1 + 4\xi (n_l + 1)] n_l!} \times \\ &\quad \sin^2(\phi_{n_l+1} t), \\ \langle \hat{S}_z(t) \rangle &= -\frac{\hbar}{2} + \hbar \sum_{n_l=0}^{\infty} \frac{4\xi (n_l + 1) |\zeta|^{2n_l} e^{-|\zeta|^2}}{[1 + 4\xi (n_l + 1)] n_l!} \sin^2(\phi_{n_l+1} t), \\ \langle \hat{J}_z(t) \rangle &= -\hbar \left( \frac{1}{2} + |\zeta|^2 \right), \end{aligned} \quad (23)$$

em que  $|\zeta|^2 = \langle n_l \rangle$ . O comportamento desses observáveis está presente na Fig. 3. O padrão de interferência presente se explica através da interferência entre diferentes valores de frequência  $\phi_{n_l+1}$ . Esse resultado se assemelha bastante ao fenômeno dos colapsos e renascimentos da Inversão de População [9], presente no sistema JC.

#### IV. MAPEAMENTO DO OSCILADOR DE DIRAC EM (2 + 1) DIMENSÕES NO MODELO ANTI-JAYNES-CUMMINGS

O modelo quântico de Rabi descreve a interação entre luz e matéria. O modelo consiste em um átomo, modelado como um sistema de dois níveis, ou qubit acoplado com um OHS monomodal interagindo transversalmente, isto é, um único modo de um campo eletromagnético quantizado. Quando o fator de acoplamento é fraco e aplicamos a aproximação de

onda girante (*RWA*)<sup>1</sup> [9], esse sistema se reduz ao modelo JC [10]. No processo de aproximação de onda girante, termos que oscilam muito, em comparação com a ordem do fator de acoplamento, são descartados. O modelo JC é também caracterizado pelo acoplamento com um termo girante no sentido horário (frequência positiva), enquanto que o modelo AJC é caracterizado por um termo girante no sentido anti-horário (frequência negativa) [11]. Uma consequência interessante ao se analisar as dinâmicas desses modelos ao se considerar um estado inicial coerente é a presença dos colapsos e renascimentos das oscilações de Rabi. Elas ocorrem devido às interferências entre diferentes valores de frequência.

Por convenção, os estados atômicos são denominados  $|e\rangle$  para o estado excitado e  $|g\rangle$  para o estado fundamental. O modelo AJC tem uma interação menos intuitiva que o modelo JC e ela está ilustrada na Fig. 4. O seu Hamiltoniano de Interação é dado por

$$\hat{H}_{AJC} = \hbar(\lambda\hat{\sigma}^+\hat{a}^\dagger + \lambda^*\hat{\sigma}^-\hat{a}) + \hbar\frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z, \quad (24)$$

em que  $\lambda$  é o termo de acoplamento entre o átomo e o campo eletromagnético, e  $\Delta$  é a frequência de dessintonia.

O mapeamento entre o AJC e o OD (2 + 1) pode ser feito usando as equações (8) e (9) através das definições

$$|\psi_1\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\psi_2\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

o que nos leva à conclusão de que os operadores fermiônicos, associados ao sistema de dois níveis, são dados por

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^- &= |g\rangle\langle e| = |\psi_2\rangle\langle\psi_1|, \\ \hat{\sigma}^+ &= |e\rangle\langle g| = |\psi_1\rangle\langle\psi_2|. \end{aligned} \quad (26)$$

Assim, o Hamiltoniano do OD pode ser escrito como

$$\hat{H}_{OD} = \hbar(g\hat{\sigma}^+\hat{a}_l^\dagger + g^*\hat{\sigma}^-\hat{a}_l) + mc^2\hat{\sigma}_z, \quad (27)$$

em que  $g := 2imc^2\sqrt{\xi}/\hbar$  é o de acoplamento entre o spin e o momento angular orbital. O termo de energia ligado

<sup>1</sup>Do inglês, *rotating wave approximation*. Usamos a expressão em inglês por ser a mais usual.

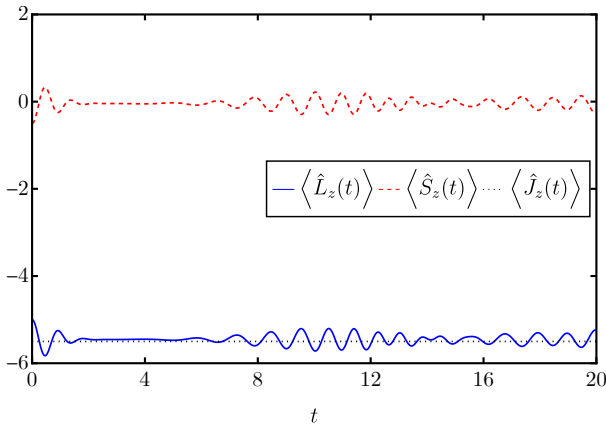


Fig. 3. Evolução temporal dos observáveis  $\langle L_z(t) \rangle$ ,  $\langle S_z(t) \rangle$  e  $\langle J_z(t) \rangle$  para o estado inicial  $|\Psi(0)\rangle = |n_l - 1\rangle |\chi_\downarrow\rangle$ , considerando  $\hbar = m = c = 1$ ,  $\langle n_l \rangle = 5$  e  $\xi = 0,05$ .

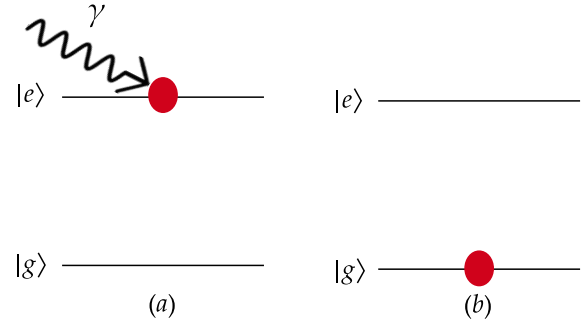


Fig. 4. Representação esquemática da interação entre campo e átomo no modelo AJC. Na parte (a), o átomo está estado excitado, e recebe um fóton ( $\gamma$ ) da cavidade. No grau de liberdade da cavidade, esse processo está associado à perda de quanta:  $|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle$ . Em seguida, em (b), o átomo passa a estar no estado fundamental.

ao operador  $\hat{\sigma}_z$  pode ser interpretado como parâmetro de dessintonia.

Observa-se, então, por comparação entre as equações (24) e (27), podemos ver que elas possuem a mesma estrutura algébrica, assim o mapeamento entre os dois sistemas está concluído. O grau de liberdade de spin do oscilador está associado com a parte atômica, enquanto que grau de liberdade do momento angular orbital está associado com o campo eletromagnético. Se trocássemos o sinal da frequência,  $\omega \rightarrow -\omega$ , no acoplamento não-mínimo em (4), teríamos um sistema com quiralidade oposta e o OD seria mapeado no sistema JC [12].

## V. CONCLUSÕES

Nesse trabalho, realizamos uma breve introdução ao modelo do Oscilador de Dirac, o qual no limite não-relativístico do sistema, recuperamos o Hamiltoniano do OHS com um forte acoplamento spin-órbita.

Com o modelo OD já estabelecido, construímos sua versão em (2 + 1) dimensões, bem como a dinâmica desse sistema, isto é, encontramos seus autoestados e autovalores. A investigação dessa dinâmica nos revelou que os observáveis  $\hat{L}_z$  e  $\hat{S}_z$  possuem um comportamento oscilatório, enquanto o observável  $\hat{J}_z$  é uma constante do movimento [4]. Além do mais, considerando que o estado inicial do momento angular orbital fosse escrito como estado coerente, observamos os colapsos e renascimentos de spin e do momento angular orbital.

Apresentamos também o mapeamento do sistema OD em (2 + 1) no modelo AJC. E então, a partir da inversão na quiralidade do OD em (2 + 1), obtemos um mapeamento no modelo JC. Sendo que é precisamente essa quiralidade que permite um mapeamento exato entre os osciladores JC, AJC e os OD (2 + 1) *left* e *right*. Essa propriedade essencial, ausente no caso padrão. Esse mapeamento pode revelar, ou ajudar a comprovar, outros efeitos da mecânica quântica relativística e também servir como modelo para sistemas, como foi usado para modelar um único íon aprisionado [4].

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Itô, K. Mori e E. Carriere, "An example of dynamical systems with linear trajectory", *Il Nuovo Cimento A Series 10*, v. 51, pp. 1119-1121, Outubro 1967.
- [2] M. Moshinsky e A. Szczepaniak, "The Dirac oscillator", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 22, pp. L817-L819, Setembro 1989.
- [3] P. Rozmej e R. Arvieu, "The Dirac oscillator. A relativistic version of the Jaynes-Cummings model", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, pp. 5367-5382, Julho 1999.
- [4] A. Bermudez e M. A. Martin-Delgado e E. Solano, "Exact mapping of the  $2 + 1$  Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal", *Physical Review A*, v. 76, pp. 041801, Outubro 2007.
- [5] C. Monroe e D. M. Meekhof e B. E. King e W. M. Itano e D. J. Wineland, "Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate", *Physical Review Letters*, v. 75, pp. 4714-4717, Dezembro 1995.
- [6] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [7] R. P. Martinez-y-Romero e H. N. Nunez-Yepe e A. L. Salas-Bruto, "ERelativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator", *European Journal of Physics*, v. 16, pp. 135, Maio 1995.
- [8] R. Gerritsma e G. Kirchmair e F. Zähringer e E. Solano e R. Blatt e C. F. Roos, "Quantum simulation of the Dirac Equation", *Nature*, v. 463, pp. 68-71, Janeiro 2010.
- [9] J. Braumüller e M. Marthaler and e A. Schneider e A. Stehli e H. Rotzinger e M. Weides e A. V. Ustinov, "Analog quantum simulation of the Rabi model in the ultra-strong coupling regime", *Natur Communications*, v. 8, pp. 779, Outubro 2017.
- [10] C. Gerry e P. Knight, *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2004.
- [11] C. Mayero e J. A. Omolo, "Anti-Jaynes-Cummings interaction of a two-level atom with squeezed light: photon statistics, atomic population inversion and entropy of entanglement", *Springer Nature*, v. 23, pp. 182, Maio 2024.
- [12] G. M. Uhdre and D. Cius and F. M. Andrade, "Effects of quantum deformation on the Jaynes-Cummings and anti-Jaynes-Cummings models", *Physical Review A*, v. 105, pp. 013703, Janeiro 2022.