

# Fundamentos Conceituais de Reticulados Ortomodulares para a Lógica da Computação Quântica

Edson Ramon de Lima Lopes e Gisele Bosso de Freitas

**Resumo**—A computação quântica desafia os fundamentos da lógica clássica, demandando estruturas formais alternativas como os reticulados ortomodulares. Este trabalho apresenta uma abordagem que conecta tais estruturas à modelagem de proposições e algoritmos quânticos, explorando sua aplicação tanto na fundamentação teórica quanto no ensino de conceitos de computação quântica. Propõe-se um mapeamento conceitual entre operações do reticulado e elementos do espaço de Hilbert dos qubits, destacando implicações para compreensão de medições, superposição e entrelaçamento. A proposta contribui para aproximar a teoria matemática dos desafios atuais na formação e implementação de tecnologias quânticas.

**Palavras-Chave**—Computação quântica, fundamentos teóricos, proposições quânticas, emaranhamento.

**Abstract**—Quantum computing challenges the foundations of classical logic, calling for alternative formal structures such as orthomodular lattices. This work introduces an approach that connects these structures to the modeling of quantum propositions and algorithms, with applications both in theoretical foundations and in the teaching of quantum computing concepts. We propose a conceptual mapping between lattice operations and elements of the qubit Hilbert space, emphasizing implications for the understanding of measurement, superposition, and entanglement. This perspective contributes to bridging mathematical theory with the current challenges of training and implementing quantum technologies.

**Keywords**—Quantum computing, theoretical foundation, quantum proposition, entanglement.

## I. INTRODUÇÃO

O surgimento da mecânica quântica no início do século XX revelou a insuficiência da lógica clássica, baseada na álgebra booleana, para descrever adequadamente sistemas quânticos. Fenômenos como superposição, emaranhamento e não-localidade desafiam a distributividade e outros princípios da lógica tradicional, exigindo o desenvolvimento de novas estruturas formais [1].

Nesse contexto, Birkhoff e von Neumann introduziram a lógica quântica como uma formulação matemática em que proposições sobre estados quânticos são representadas por subespaços de Hilbert [1]. Para dar conta dessa estrutura, emergem os reticulados ortomodulares, que generalizam a álgebra booleana e possibilitam a representação consistente de relações lógicas entre estados quânticos [2], [3].

Edson Lopes, Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, Imperatriz-MA, e-mail: edson.lopes@uemasul.edu.br; Gisele Bosso de Freitas, Centro de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas, Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão, Imperatriz-MA, giselebosso@uemasul.edu.br.

Esses reticulados desempenham papel fundamental não apenas na fundamentação teórica da mecânica quântica, mas também na computação quântica, onde operações sobre qubits podem ser interpretadas como transformações de proposições no reticulado [4]. Assim, a lógica quântica fornece uma base conceitual sólida tanto para o estudo matemático de sistemas quânticos quanto para o ensino e a implementação de algoritmos e circuitos quânticos.

Diante disso, este trabalho propõe-se a investigar os fundamentos da lógica quântica, com foco na estrutura e propriedades dos reticulados ortomodulares, buscando relacionar tais conceitos à modelagem de proposições e algoritmos de computação quântica.

## II. METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho combinou revisão teórica, formalização matemática e simulação computacional. Inicialmente, foram analisadas obras clássicas sobre lógica quântica, como Birkhoff e von Neumann [1], Svozil [2] e Pták e Pulmannová [3], garantindo o embasamento conceitual. Em seguida, as proposições quânticas foram modeladas como subespaços de  $\mathbb{C}^2$ , com as operações lógicas correspondentes traduzidas para interseção ( $\wedge$ ), soma direta com fecho ( $\vee$ ) e complemento ortogonal ( $\perp$ ), e diagramas de Hasse representando a estrutura ortomodular. Por fim, circuitos quânticos simples foram implementados no Qiskit [5], analisando portas Hadamard e CNOT e o surgimento de estados emaranhados, evidenciando o caráter contextual e não distributivo da lógica quântica.

## III. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A lógica clássica, baseada na álgebra booleana e nas operações tradicionais de conjunção, disjunção e negação, é adequada para o raciocínio em sistemas determinísticos e macroscópicos. No entanto, desde o advento da mecânica quântica, ficou evidente que os princípios da lógica clássica não capturam completamente os comportamentos e propriedades dos sistemas quânticos, como a superposição, o entrelaçamento e o princípio da incerteza. Por exemplo, a distributividade, uma das propriedades fundamentais da lógica clássica, falha em certos contextos quânticos, indicando a necessidade de uma estrutura lógica alternativa.

### A. Reticulados

Uma das formas de generalizar a lógica clássica é através dos reticulados, que são conjuntos parcialmente ordenados  $L$  equipados com duas operações binárias, o *join* ( $\vee$ ) e o *meet* ( $\wedge$ ), tais que para quaisquer  $a, b \in L$ :

- Idempotência:

$$a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$$

- Comutatividade:

$$a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a$$

- Associatividade:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

- Absorção:

$$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

Um reticulado também pode ser definido como um conjunto parcialmente ordenado  $(L, \leq)$  onde, para quaisquer dois elementos  $a, b \in L$ , existe:

- um menor limite superior

$$(a \vee b)$$

- um maior limite inferior

$$(a \wedge b)$$

Essa estrutura fornece uma base conceitual que permite tratar proposições de forma mais geral do que a álgebra booleana, preparando o terreno para estruturas que comportam fenômenos quânticos.

### B. Reticulados Ortocomplementados

Para incorporar conceitos de negação e complementaridade, essenciais na lógica quântica, introduzem-se os reticulados ortocomplementados. Um reticulado ortocomplementado é um reticulado  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  equipado com uma operação de ortocomplementação  $^\perp : L \rightarrow L$  tal que, para todo  $a, b \in L$ , valem as seguintes propriedades:

- Involutividade:

$$(a^\perp)^\perp = a.$$

- Ortonormalidade:

$$a \wedge a^\perp = 0 \quad \text{e} \quad a \vee a^\perp = 1,$$

onde 0 e 1 são os elementos mínimo e máximo de  $L$ , respectivamente.

- Antimonotonicidade: Se  $a \leq b$ , então

$$b^\perp \leq a^\perp.$$

Assim, reticulados ortocomplementados permitem modelar de maneira rigorosa relações de complementaridade entre proposições, aproximando a lógica formal específicas dos sistemas quânticos.

### C. Reticulados Ortomodulares

Os reticulados ortomodulares surgem como a estrutura mais adequada para a lógica quântica, combinando as propriedades de ortocomplementação com condições adicionais de ortomodularidade. Um reticulado ortomodular é um reticulado  $(L, \leq)$  com um operador de ortocomplemento  $^\perp$  que satisfaz condições adicionais de modulação e ortogonalidade. Esses reticulados são fundamentais em lógica quântica e teoria de operadores. Um reticulado  $L$  é ortomodular se:

- Ortocomplementado:

$$a \vee a^\perp = 1 \quad \text{e} \quad a \wedge a^\perp = 0,$$

onde 0 e 1 são os elementos mínimo e máximo de  $L$ .

- Lei da Ortomodularidade:

$$b = a \vee (b \wedge a^\perp).$$

Isso generaliza a condição modular em reticulados.

- Antimonotonicidade: Para  $a, b \in L$ ,

$$a \leq b \implies b^\perp \leq a^\perp.$$

Dessa forma, é possível modelar proposições quânticas como subespaços de um espaço de Hilbert e visualizar suas relações de ortogonalidade e hierarquia por meio de diagramas de Hasse. A Tabela I compara os conceitos da lógica clássica e da lógica quântica, evidenciando diferenças fundamentais na estrutura, nas operações e no efeito da medição sobre os estados.

TABELA I  
COMPARAÇÃO ENTRE AS LÓGICAS CLÁSSICA E QUÂNTICA.

Conceito	Lógica Clássica	Lógica Quântica
Proposição	verdadeiro ou falso	subespaço de Hilbert
Negação	$\neg A$	$A^\perp$
Conjunção	$A \wedge B$	Interseção
Disjunção	$A \vee B$	Soma de subespaços
Estrutura	Álgebra Booleana	Reticulado Ortomodular
Medição	revela valor	colapsa estado

## IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise das estruturas lógicas revelou inicialmente que reticulados booleanos, satisfazendo as propriedades de idempotência, comutatividade, associatividade e absorção, reproduzem o comportamento da lógica clássica, sendo adequados para sistemas determinísticos. Entretanto, ao considerar o conjunto dos subespaços vetoriais de  $\mathbb{C}^2$  — por exemplo, aqueles gerados pelos estados  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|+\rangle$  — observa-se a quebra da distributividade, característica que distingue de forma inequívoca a lógica quântica. Essa não distributividade manifesta-se na impossibilidade de reescrever certas combinações de proposições de modo equivalente, como ocorre na álgebra booleana.

Os reticulados ortomodulares permitem uma descrição rigorosa dos subespaços de  $\mathbb{C}^2$  como elementos do reticulado  $L(\mathbb{C}^2)$ , onde as operações *meet* ( $\wedge$ ), *join* ( $\vee$ ) e complemento ortogonal ( $^\perp$ ) capturam relações fundamentais entre

subespaços. A interseção de dois subespaços corresponde à sobreposição de estados; por exemplo,

$$|0\rangle \wedge |1\rangle = 0,$$

já que não há interseção entre subespaços ortogonais. A operação de *join* satisfaz

$$|0\rangle \vee |1\rangle = \mathbb{C}^2,$$

demonstrando que a combinação de subespaços ortogonais gera o espaço completo. O complemento ortogonal satisfaz

$$|0\rangle^\perp = |1\rangle, \quad |1\rangle^\perp = |0\rangle,$$

enquanto

$$|+\rangle^\perp = |-\rangle,$$

onde

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}},$$

evidenciando simetrias e propriedades singulares dessa estrutura.

Dessa forma, é possível modelar afirmações sobre o estado de um sistema como subespaços de um espaço de Hilbert. Por exemplo, a proposição

“o qubit está no estado  $|0\rangle$ ”

corresponde ao subespaço de todos os vetores que podem ser obtidos como múltiplos escalares do vetor  $|0\rangle$  no espaço de Hilbert do qubit:

$$\alpha|0\rangle = \text{span}(|0\rangle),$$

onde  $\alpha$  é um número complexo.

De forma análoga, a proposição

“o qubit está no estado  $|+\rangle$ ”

corresponde ao subespaço  $\text{span}(|+\rangle)$ , que também é unidimensional e contém todos os vetores que são múltiplos escalares de

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Cada uma dessas proposições sobre o estado do qubit, portanto, pode ser modelada como um subespaço distinto do espaço de Hilbert, permitindo representar relações de ortogonalidade e hierarquia entre estados quânticos diferentes.

Geometricamente, esse subespaço é unidimensional, representando uma linha através da origem no espaço vetorial, e captura a ideia de que todos os vetores neste subespaço estão “na mesma direção” de  $|0\rangle$  ou de  $|+\rangle$ . O gráfico da Fig. (1) ilustra como diferentes proposições sobre o estado do qubit correspondem a subespaços distintos, evidenciando relações de ortogonalidade e a estrutura de lógica quântica subjacente.

O diagrama de Hasse apresentado na Fig. (2) ilustra a hierarquia dos subespaços do espaço de Hilbert de um qubit, destacando como diferentes proposições sobre o estado do sistema correspondem a subespaços distintos. Cada nó representa um subespaço: os níveis mais baixos contêm subespaços triviais, enquanto o nível mais alto representa o espaço completo  $\mathcal{H}$ .

As cores e posições dos nós do diagrama podem ser relacionadas ao gráfico de vetores mostrado anteriormente: a

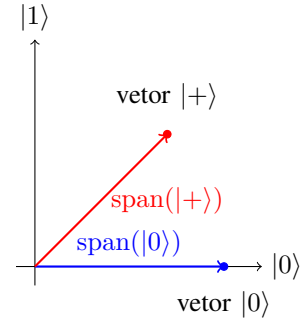


Fig. 1. Subespaços de um qubit no espaço de Hilbert. A linha azul representa  $\text{span}(|0\rangle)$  e a vermelha  $\text{span}(|+\rangle)$ .

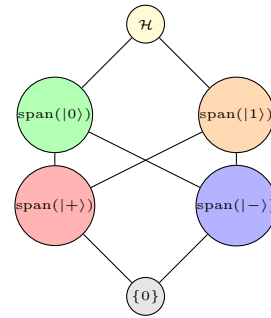


Fig. 2. Diagrama de Hasse dos subespaços de um qubit. Cada nó representa um subespaço, mostrando hierarquia e ortogonalidade entre estados como  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ .

linha azul representa  $\text{span}(|0\rangle)$  e a linha vermelha representa  $\text{span}(|+\rangle)$ . No diagrama de Hasse, o círculo verde  $\text{span}(|0\rangle)$  e o rosa claro  $\text{span}(|1\rangle)$  ocupam níveis mais altos, enquanto que o círculo rosa escuro  $\text{span}(|+\rangle)$  e o azul  $\text{span}(|-\rangle)$  aparecem em níveis intermediários, mostrando como combinam-se linearmente para gerar subespaços maiores.

Dessa forma, o gráfico de vetores e o diagrama de Hasse são representações complementares: o primeiro mostra geometricamente as direções dos vetores no espaço de Hilbert, enquanto o segundo evidencia a estrutura de inclusão e as relações de ortogonalidade entre os subespaços, permitindo visualizar de forma clara a lógica quântica subjacente.

Ao analisar a dinâmica de estados, operadores quânticos unitários — como a porta Hadamard seguida da porta CNOT — permitem gerar estados emaranhados. Por exemplo, considerando o estado inicial  $|00\rangle$ , O processo inicia-se com a aplicação da porta Hadamard no qubit  $q_0$ , transformando o estado  $|0\rangle$  em uma superposição:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Assim, o sistema de dois qubits passa a ser descrito por

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle.$$

Em seguida, aplica-se a porta CNOT, tendo  $q_0$  como qubit de controle e  $q_1$  como alvo. Como resultado, o estado evolui para o correspondente ao estado emaranhado de Bell:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\Phi^+\rangle.$$

O circuito quântico é mostrado na Fig. 3:

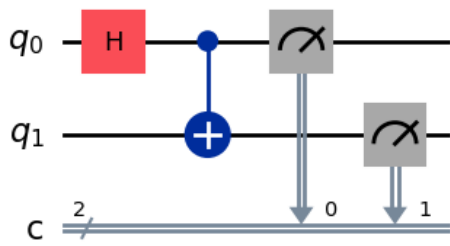


Fig. 3. Circuito quântico plotado pelo Qiskit, demonstrando a geração do estado emaranhado  $|\Phi^+\rangle$ .

Nesse contexto, proposições sobre o valor de um qubit individual não podem ser determinadas antes da medição, sendo logicamente indefinidas no sentido clássico. Após a medição de um dos qubits, observa-se o colapso do estado e a consequente determinação das proposições associadas ao qubit remanescente, com probabilidades definidas. Por exemplo, ao medir o primeiro qubit no estado  $|0\rangle$ , o segundo qubit colapsa para  $|0\rangle$  com probabilidade unitária.

O histograma obtido após a medição é apresentado na Fig. 4 e indica que o estado do sistema tem componentes iguais nos subespaços  $|00\rangle$  e  $|11\rangle$ , que são ortogonais no reticulado do espaço de Hilbert de dois qubits. Isso evidencia a estrutura de reticulado ortomodular, com átomos correspondendo a estados mensuráveis e relações de ortogonalidade representando incompatibilidade de proposições quânticas.

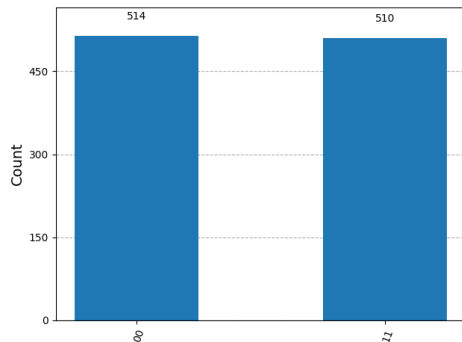


Fig. 4. Histograma das contagens de estados após medição do par de qubits emaranhados, obtido via Qiskit.

Esses resultados evidenciam que o formalismo dos reticulados ortomodulares descreve de maneira consistente tanto a estrutura estática dos estados quânticos quanto sua evolução e atualização decorrentes de operações e medições. A lógica quântica, assim, é contextual e não distributiva: proposições podem não ter valor de verdade fixo até a medição, e o valor lógico depende do estado do sistema e do contexto experimental — aspectos fundamentais na computação quântica.

## V. CONCLUSÕES

A análise desenvolvida ao longo deste trabalho evidencia que a lógica quântica se estrutura sobre fundamentos ma-

temáticos distintos da lógica clássica, sobretudo pela não distributividade e pela necessidade de formalismos mais abrangentes para descrever sistemas quânticos. Nesse contexto, os reticulados ortomodulares assumem papel central, oferecendo uma linguagem matemática adequada para a representação de proposições sobre estados e medições quânticas.

Além disso, verificou-se a estreita conexão entre operações da computação quântica e as transformações dessas proposições, o que reforça a pertinência do uso da lógica quântica como ferramenta de modelagem de algoritmos e circuitos. Por fim, destaca-se a relevância de uma base conceitual sólida para a aprendizagem da computação quântica, de modo a aproximar a teoria matemática dos desafios pedagógicos e tecnológicos que emergem no campo das tecnologias quânticas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à Profa. Dra. Gisele Bosso de Freitas pela orientação e apoio, à FAPEMA pela bolsa de iniciação científica, à UEMASUL pelo apoio financeiro parcial e à Liga Acadêmica de Informação e Computação Quântica (LACIQU) pela oportunidade de crescimento acadêmico e aprendizado.

## REFERÊNCIAS

- [1] G. Birkhoff and J. von Neumann, "The Logic of Quantum Mechanics," *Annals of Mathematics*, vol. 37, no. 4, pp. 823–843, 1936.
- [2] K. Svozil, *Quantum Logic*. Springer, 1998.
- [3] P. Pták and S. Pulmannová, *Orthomodular Structures as Quantum Logics*. Springer, 1991.
- [4] M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini, and R. Greechie, *Reasoning in Quantum Theory*. Springer, 2004.
- [5] IBM Qiskit documentation. Disponível em: <https://qiskit.org>.