PARADOXO DA DICOTOMIA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO E POPULARIZAÇÃO DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Alex Victor Bispo[1]

Eixo 4 – Práticas de Ensino da Matemática

Resumo: Este trabalho é um resultado parcial de uma pesquisa de dissertação do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da instituição associada Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e que tem como objetivo utilizar paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais (EFAF), classificando-os em três classes: verídicos, falsídicos e antinomias. A metodologia adotada foi tanto a pesquisa documental (BNCC e o currículo de Pernambuco para o EFAF, além de livros didáticos e paradidáticos) quanto a pesquisa bibliográfica (dissertações do Profmat, artigos, sites, canais de YouTube, etc) como metodologia, desenvolvendo-se por meio das etapas: revisão bibliográfica quanto aos conceitos, classificação e utilização na sala de aula de paradoxos matemáticos; definição da metodologia de investigação e apresentação do paradoxo; pesquisa sobre o paradoxo em diferentes meios de comunicação; associação do paradoxo pesquisado a objetos de conhecimento e habilidades do EFAF da BNCC; e investigação histórica, filosófica e matemática do paradoxo, sendo esta, preferencialmente, por meio de problemas cujos assuntos estão abrangidos explícita ou implicitamente pela BNCC. Aqui, apenas o Paradoxo da Dicotomia é abordado, sendo reconhecido como da segunda classe; enunciado; contextualizado histórico e filosoficamente; associado a objetos de conhecimento e habilidades da BNCC do EFAF; e analisado matematicamente, isto por meio da resolução de dois problemas.

Palavras-chave: Paradoxo da Dicotomia. Zenão. Metade. Infinito. EFAF. BNCC.

1 Introdução

Este trabalho tem o objetivo de apresentar o Paradoxo da Dicotomia como uma estratégia de ensino e popularização da Matemática no EFAF, inspirando-se no célebre popularizador da Matemática, Malba Tahan, quando escreveu, no prefácio de uma de suas maiores obras, As maravilhas da Matemática, "deve o professor de Matemática conhecer as recreações numéricas, os paradoxos curiosos e os episódios pitorescos relacionados com a Ciência" (Tahan, 1973, p. 9).

Entendendo-se que a curiosidade é uma das maiores aliadas da aprendizagem, pois, para o aluno aprender, ele tem que querer e, para ele querer, aquilo que se aprende deve ser apresentado de forma atrativa, apresenta-se esse paradoxo por sua natureza contraintuitiva, desafiadora, criativa e ousada.

[1] Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) • Mestrando • Recife, Pernambuco (PE), Brasil • alexvbispo@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0009-0001-0628-9410

2 Fundamentação teórica

No intuito de enxergar o cenário de trabalhos com os paradoxos, realiza-se um levantamento inicial no repositório do Profmat e encontra-se oito dissertações no âmbito do Profmat com paradoxos como tema principal ou secundário. Três deles abordam paradoxos probabilísticos (Viana, 2013; Salomão, 2014; Yamamoto, 2020); três, paradoxos geométricos (Dorta, 2013; Campos, 2016; Sentone, 2017); um aplica o paradoxo de Galileu ao estudo de frações contínuas (Oliveira, 2014); e o mais recente aborda paradoxos presentes em operações numéricas: divisão por zero, regras de sinais, raízes quadradas de números negativos e operações com logaritmos (Silva, 2022).

Tanto Salomão como Yamamoto focam no paradoxo de Monty Hall, um dos mais conhecidos da Teoria das Probabilidades, estudando, inclusive, modificações e generalizações dele. Já Viana aborda o tema probabilidade geométrica e apresenta alguns paradoxos probabilísticos, embora não relacionados com o tema principal, com a exceção do paradoxo de Bertrand.

Antes de iniciar o tema principal, Dorta comenta algumas definições para o termo paradoxo e discorre sobre possíveis classes de paradoxos. Ele aborda paradoxos relacionados ao princípio da distribuição oculta, embora não explicitamente, o que só é feito por Sentone. Já Campos aplica alguns paradoxos apresentados por DORTA à Educação de Jovens e Adultos.

Diferenciando-se dos trabalhos supracitados, esta pesquisa visa apresentar um conjunto maior de paradoxos abordando outros conceitos matemáticos, como sequências, infinito, construção com régua e compasso, porcentagem, entre outros.

2.1 Conceituação e classificação dos paradoxos

Por haver diferentes possíveis entendimentos sobre o que é um paradoxo, de uma ideia aparentemente contraintuitiva a uma autocontradição, torna-se necessário conceituá-los e classificá-los. A classificação utilizada foi a de Quine (1976), que condiz com o entendimento de Barker (1969), separando os paradoxos em três classes: verídicos, falsídicos e antinomias.

Paradoxos verídicos são aqueles com conclusões surpreendentes e contraintuitivas, porém, depois de investigados, percebe-se que realmente são verdadeiros. Paradoxos falsídicos trazem argumentos aparentemente válidos levando, porém, a conclusões absurdas. Esses paradoxos diferem das falácias, pois estas podem levar a conclusões verdadeiras ou não surpreendentes ou ambas, embora que sempre há uma falácia na argumentação do paradoxo (Quine, 1976).

Já as antinomias ocorrem "quando se está na situação de mostrar, por meio de raciocínio perfeitamente lícito, na aparência que algo deve ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo" (Barker, 1969, p. 111). Segundo Quine (1976), antinomias produzem proposições autocontraditórias — a falsidade de uma, implica na veracidade da outra, sendo que esta implica na veracidade da primeira, e vice-versa — aceitando-se como verdadeiras uma forma de pensamento. "Ela estabelece que algum padrão de raciocínio tácito e confiável deve ser explicitado e, doravante, evitado e revisado" (Quine, 1976, p. 5).

2.2 O paradoxo

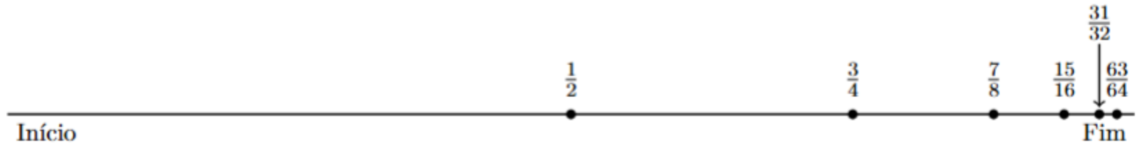
O Paradoxo da Dicotomia é atribuído a Zenão de Eleia (490 a. C. – 430 a. C.), filósofo grego, amigo e discípulo de Parmênides, que, assim como o seu mestre, opunha-se às ideias de Heráclito, afirmando que a mudança e o movimento eram impossíveis, meramente ilusões dos sentidos.

Ele foi um dos primeiros a usar e organizar os argumentos e conclusões de suas ideias em prosa, diferentemente dos seus contemporâneos e antecessores, que afirmavam os seus pensamentos filosóficos através de poesias sem apresentar argumentos convincentes (Dowden, [*s. d.*]). Além disso, foi pioneiro na utilização de algumas técnicas de argumentação e persuasão, como *reductio ad absurdum* — na qual assume-se que a proposição que se quer provar a veracidade é falsa e chega-se em um absurdo, concluindo, então, que a proposição é de fato verdadeira — e *modus tollens* — na qual prova-se que uma proposição implica em outra e depois prova-se que a segunda é falsa, concluindo-se, então, que a primeira também deve ser falsa (Katz, 2009).

Segundo Proclo, Zenão enunciou pelo menos quarenta paradoxos em seus livros, muitos não chegando a esta era, utilizando neles as técnicas supracitadas. Abaixo enuncia-se um dos mais famosos desses paradoxos.

Paradoxo da Dicotomia. Um corredor pretende percorrer certo trajeto finito em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve percorrer $\frac{1}{2}$ dele. Depois disso, ele deverá percorrer a metade do trecho restante, ou seja $\frac{1}{4}$ do trajeto total. Ainda, ele deverá percorrer a metade do quarto que falta, ou seja, $\frac{1}{8}$. Analogamente, ele percorrerá mais $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ e assim *ad infinitum* do trajeto, de sorte que o corredor precisará percorrer infinitos trechos antes de chegar no fim do trajeto. Logo, é impossível que o corredor alcance o final do trajeto.

Figura 1 – Seis primeiros trechos



Fonte: elaboração própria.

Obviamente, isso é um absurdo, pois, de forma mais geral, isso implicaria que é impossível que uma pessoa saia de um local e vá para outro. De fato, essa é a essência do paradoxo: provar que o movimento é impossível, mera ilusão dos sentidos. Percebe-se, então, que esse paradoxo é da classe falsídica.

Há pelo menos três premissas que possam ter levado Zenão a essa conclusão, embora não se saiba certamente quais foram as que ele considerou. São elas: a soma dos infinitos deslocamentos é infinita; o tempo que levaria para o corredor completar o trajeto é infinito; e há infinitas etapas a serem finalizadas antes de se chegar ao final do trajeto, sendo isto, então, impossível.

Vale salientar que os gregos antigos não concebiam somas de infinitos termos, sendo possível que Zenão simplesmente tivesse assumido que a soma de infinitos deslocamentos ou dos infinitos intervalos de tempo fosse infinita.

Intuitivamente, a primeira premissa parece ser a mais fraca, pois cada trecho é uma parte disjunta do trajeto, com exceção de suas extremidades, de modo que, somando-se cada deslocamento, o resultado deveria ser menor que ou igual ao comprimento total do trajeto original, sendo, por este o ser, finito — note que, *a priori*, é possível que o resultado seja menor que o trajeto, pois não se sabe se todos os pontos do trajeto estão contidos em algumas de suas frações —, mas isso é uma intuição, carecendo de uma demonstração matemática rigorosa. Essa demonstração, como também a análise das demais premissas, será feita na seção 6.

3 Metodologia

Este trabalho valeu-se tanto da pesquisa documental (BNCC e o currículo de Pernambuco para o EFAF, além de livros didáticos e paradidáticos) quanto da pesquisa bibliográfica (dissertações do Profmat, artigos, sites, canais de YouTube, etc) como metodologia, desenvolvendo-se por meio das seguintes etapas.

1. Revisão bibliográfica quanto aos conceitos, classificação e utilização na sala de aula de paradoxos matemáticos;
2. Definição da metodologia de investigação e apresentação do paradoxo;
3. Pesquisa sobre o paradoxo em diferentes meios de comunicação;
4. Associação do paradoxo pesquisado a objetos de conhecimento e habilidades do EFAF da BNCC; e
5. Investigação histórica, filosófica e matemática do paradoxo, sendo esta, preferencialmente, por meio de problemas cujos assuntos estão abrangidos explícita ou implicitamente pela BNCC.

4 Resultados e Discussão

Utilizar paradoxos matemáticos como estratégia de ensino e popularização da Matemática na sala de aula desenvolve a capacidade dos alunos de abstrair, imaginar, refletir, investigar, dialogar e argumentar, pois aqueles são, geralmente, como é o caso do Paradoxo da Dicotomia, contraintuitivos, quando trazem conclusões surpreendentes e estranhas à primeira vista; desafiantes, quando se tenta investigar os seus conceitos, argumentos ou falácias; criativos, quando puramente abstratos ou situações inusitadas; e ousados, quando envolvem conteúdos não abordados ou pelo menos não muito explorados na Educação Básica — no caso deste trabalho, o infinito e as supertarefas. Isso, além de aludir às questões históricas e filosóficas do paradoxo, seja por exposição do docente seja por pesquisa e investigação do discente, se vincula diretamente à competência geral 2 da Educação Básica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2018, p. 9).

No caso específico deste paradoxo e da área da Matemática, essa competência geral ramifica-se nas competências específicas 1, 2, 3 e 6 de Matemática do EFAF:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
>
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
>
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
>
> [...]
>
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

De fato, o Paradoxo da Dicotomia é um exemplo claro como o entendimento matemático — ou melhor, matemático-filosófico — mudou no decorrer da história da humanidade. Os matemáticos que desenvolveram o Cálculo e a Análise estavam bem cientes dos paradoxos de Zenão e seus problemas e encontraram soluções e tratamentos rigorosos na lida com o infinito e o contínuo.

Ainda, os alunos precisarão utilizar conhecimentos das diferentes unidades temáticas, sobretudo Números, Álgebra e Geometria, para investigar o paradoxo, assim como diferentes registros (algébrico, gráfico, desenho geométrico, linguagem materna, etc).

Os objetos de conhecimento e as habilidades potencialmente desenvolvidas por meio do uso estratégico do Paradoxo da Dicotomia estão organizados no quadro abaixo.

Quadro 1 – Associação do Paradoxo da Dicotomia com objetos de conhecimento e habilidades da BNCC

Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidade
Números	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Números	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

Números	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
Álgebra	Linguagem algébrica: variável e incógnita	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Álgebra	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Geometria	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problema	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Álgebra	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: elaboração própria.

5 Análise matemática do paradoxo e discussão

A análise matemática do paradoxo foi feita por meio de dois problemas, enunciados e resolvidos abaixo. Mas antes é necessário enunciar e demonstrar o seguinte lema.

Lema. Para todo natural n, vale $2^n > n$.

Demonstração. A prova será feita por indução, sendo o caso base $n = 1$ válido, pois $2^1 > 1$. Suponha agora que vale $2^n > n$ para algum natural n. Quer-se provar que $2^{n+1} > n + 1$. De fato, como 2^n é maior que n, por hipótese de indução, e $2^n \geq 2^1 > 1$, segue que $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 1$.

Portanto, $2^n > n$ para todo n natural. $\square$

Para refutar a primeira premissa, considerar-se-á, sem perda de generalidade, que o trajeto tem comprimento igual a uma unidade, simplificando o problema da soma dos infinitos deslocamentos ser igual ao comprimento do trajeto todo ao seguinte problema.

Problema 1. Prove que o resultado da soma infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ é igual a 1.

Antes de resolver o problema, cabe algumas observações tanto para este como para os próximos problemas. Doravante, essa soma infinita será denotada por S_∞. Segundo Muniz (2022) e Stewart (2015), S_∞ é uma série, denotando por S_n as somas parciais dos n primeiros deslocamentos. Embora o termo soma infinita seja, provavelmente, mais significativo para o aluno do que série, referir-se a S_n como soma parcial, além de usar e explicar, julgando o docente oportuno e a depender do nível da turma, outros termos próprios do Cálculo e da Análise, como limite, convergência e divergência, desenvolve, entre outras coisas, as competências gerais 2 e 4 da BNCC.

Duas soluções estão apresentadas abaixo. Ambas utilizam equações e inequações, entendendo-se que estas “devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos” (BRASIL, 2018, p. 271), além de operações entre frações.

A primeira solução, talvez menos matematicamente rigorosa em sua conclusão, vale-se da identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas, habilidade necessária na Educação Básica para

> o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento — pensamento algébrico — que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos (BRASIL, 2018, p. 270).

Solução 1 do Problema 1. Observe o seguinte padrão na soma dos primeiros deslocamentos do trajeto:

$$\frac{1}{2} = \frac{2^1-1}{2^1};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2^2-1}{2^2};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \frac{2^3-1}{2^3};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16} = \frac{15}{16} = \frac{2^4-1}{2^4};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = \frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32} = \frac{31}{32} = \frac{2^5-1}{2^5}.$$

Indutivamente, espera-se que a soma dos primeiros seis deslocamentos seja $\frac{63}{64} = \frac{2^6-1}{2^6}$. De forma mais geral, espera-se que S_n seja igual a $\frac{2^n-1}{2^n}$. Provar-se-á isso por indução, sendo os casos básicos já verificados, bastando provar agora que, valendo $S_n = \frac{2^n-1}{2^n}$, vale também que $S_{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$.

De fato,

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}},$$

como se queria provar.

Logo, para todo natural n, $S_n = \frac{2^n-1}{2^n}=1 - \frac{1}{2^n}$.

Agora, observe o seguinte:

$\frac{1}{2} = 0{,}5;$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625;$	$\frac{1}{128} = 0{,}0078125;$
$\frac{1}{4} = 0{,}25;$	$\frac{1}{32} = 0{,}03125;$	$\frac{1}{256} = 0{,}00390625;$
$\frac{1}{8} = 0{,}125;$	$\frac{1}{64} = 0{,}015625;$	$\frac{1}{512} = 0{,}001953125.$

Ou seja, na medida que n cresce, $\frac{1}{2^n}$ aproxima-se de 0 e, consequentemente, S_n se aproxima de 1.

De forma mais rigorosa, para todo número $L > 0$, existe um número natural $n$tal que $n > \frac{1}{L}$. Pelo lema, segue que $2^n > n > \frac{1}{L}$ e, logo, $\frac{1}{2^n} < L$. Ou seja, para qualquer número positivo, sempre existe um n suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{1}{2^{n+2}} > \frac{1}{2^{n+3}} > \ldots$ são todos menores que esse número. Assim, para n suficientemente grande, sempre existe $S_n$tão próximo de 1 quanto se queira, de sorte que $S_\infty = 1$.

$\square$

A segunda solução vale-se, além de outros, do conceito de dízimas periódicas, que é uma alternativa à abordagem por meio da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, tendo em vista que este assunto não é pertencente ao currículo básico nacional do EFAF.

Solução 2 do Problema 1. Primeiramente, prove-se que S_∞ é um número, isto é, que ele não é infinito. Como S_∞ é a soma de números positivos, basta provar que ele é limitado superiormente, ou seja, basta provar que existe um número real L tal que $S_\infty < L$. Dessa forma, note que

$$S_\infty = \frac{1}{16^0}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{16^1}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$$S_\infty = \frac{1}{16^0}\cdot\frac{15}{16}+\frac{1}{16^1}\cdot\frac{15}{16}+\frac{1}{16^2}\cdot\frac{15}{16}+\frac{1}{16^3}\cdot\frac{15}{16}+\frac{1}{16^4}\cdot\frac{15}{16}+\ldots$$

$$S_\infty < \frac{1}{10^0}\cdot 1+\frac{1}{10^1}\cdot 1+\frac{1}{10^2}\cdot 1+\frac{1}{10^3}\cdot 1+\frac{1}{10^4}\cdot 1+\frac{1}{10^5}\cdot 1+\ldots.$$

$$S_\infty < 1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+0{,}00001+0{,}000001+\ldots$$

$$S_\infty < 1{,}111\ldots = \frac{10}{9}.$$

Logo, S_∞ é de fato limitado superiormente e, consequentemente, um número real. Agora, provar-se-á que $S_\infty = 1$. Com efeito,

$$S_\infty = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot S_\infty = 1. \qquad \square$$

Orientar os alunos por meio da primeira solução é levá-los a se convencerem que a sequência $(S_n)_{n\in N}$ realmente se aproxima de 1 na medida que n tende ao infinito. Isso os expõe previamente às noções básicas do Cálculo, preparando-os para estudos futuros mais avançados. Já a segunda solução pode ser aproveitada como uma aplicação ao final de uma sequência didática sobre dízimas periódicas e representação de números cuja parte decimal é infinita como a soma infinita na qual os termos são a razão entre seus algarismos e potências de 10 com expoentes cada vez menores. Nos dois casos, ambas são úteis para exercitar as habilidades referentes às operações entre frações e às equações e inequações.

A segunda premissa é refutada pelos mesmos argumentos da primeira quando se entende que o tempo que o corredor leva para percorrer um dos trechos é proporcional a esse mesmo trecho, isso supondo que o corredor percorre o trajeto a uma velocidade constante. De fato, isso se resume no seguinte problema.

Problema 2. Suponha que o corredor do Paradoxo da Dicotomia percorra o trajeto sempre a uma velocidade constante v. Prove que ele termina a corrida em um intervalo de tempo finito e encontre o valor de t_∞ em função de v e S_∞.

Solução do Problema 2. Já se viu que, quanto ao comprimento do trajeto, seria possível que o corredor terminasse a corrida. O que se quer provar agora é que ele terminaria esse percurso finito em um intervalo de tempo também finito.

Sejam t_∞ o instante em que o corredor completa o trajeto e Δt_n o intervalo de tempo em que ele leva percorrendo o n-ésimo trecho do trajeto, ou seja, percorrer uma distância de $\frac{1}{2^n}$. Logo, $\Delta t_n = \frac{1}{2^n \cdot v}$ e, como $t_\infty = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots$, tem-se

$$t_\infty = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\right) = \frac{1}{v} \cdot S_\infty.$$

Portanto, t_∞ é um número real, ou seja, o corredor percorrerá todos os trechos em um intervalo de tempo finito. $\square$

Para se entender a terceira premissa, vale enunciar o Paradoxo da Dicotomia numa maneira alternativa.

Paradoxo da Dicotomia (enunciado alternativo) Um corredor pretende percorrer certo trajeto em linha reta. Ora, antes que ele alcance o final desse trajeto, deve passar pelo seu ponto médio. Depois disso, ele deverá passar pelo ponto médio do trecho restante, e depois pelo ponto médio da segunda metade desse restante, e depois pelo ponto médio da segunda metade da segunda metade desse restante, e assim *ad infinitum*, de sorte que sempre haverá um novo ponto médio para ser ultrapassado pelo corredor, ou seja, o corredor deverá ultrapassar infinitos pontos para chegar ao final do trajeto. Porém o infinito é algo que não tem fim, logo é impossível que o corredor finalize essa corrida.

O que o corredor deve então resolver é uma supertarefa — uma tarefa com um número infinito de etapas e que deve ser realizada num intervalo finito de tempo —, sendo a n-ésima tarefa chegar no n-ésimo ponto médio. Ora, os problemas referentes às premissas anteriores resolvem essa questão. Supondo que a velocidade do corredor é constante e igual a S_∞ por minuto, segue que o corredor completa a primeira tarefa, chegar no primeiro ponto médio, em 30 segundos; a segunda, em 15 segundos; a terceira, em 7,5 segundos e assim por diante, de sorte que ele completará a n-ésima tarefa depois de terem passado $t_n = \frac{1}{2^n}$ minutos, completando a supertarefa ao final de $t_\infty = 1$ minuto.

7 Considerações finais

Como visto, é possível utilizar o Paradoxo da Dicotomia como estratégia de ensino e popularização da Matemática no EFAF, pois ele aborda objetos de conhecimento do currículo básico nacional e desenvolve as habilidades essenciais para a aprendizagem dos alunos. Mais que isso, torna as aulas de Matemática mais interessantes, lúdicas e significativas para o alunado.

Aqui, o paradoxo foi tratado por meio de problemas relacionados com as unidades temáticas de Números e Álgebra, porém se pretende, em próximos trabalhos, tratá-lo também por meio da Geometria (construção de pontos médios e mediatrizes com régua e compasso).

Os problemas e as soluções foram tratados de forma próxima ao rigor matemático, porém sempre buscando recorrer ao currículo básico e ao nível do EFAF. Dessa forma, as resoluções das equações e inequações se deram de forma geral e literal, porém pode e deve o professor leitor deste trabalho aplicar esses problemas na sua sala de aula de maneira mais contextualizada. Não somente os problemas, mas também o próprio paradoxo, apresentando-o por meio de diversas e oportunas maneiras (contação de história, exposição de vídeos ou ilustrações, debate, peça teatral, entre outras).

Por fim, pretende-se, futuramente, abordar um pouco mais o conceito de supertarefa — analisando outros paradoxos do infinito, como o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, o Paradoxo do Hotel de Hilbert e o Paradoxo de Ross-Littlewood —, não com um fim em si mesmo, mas sim como uma estratégia para tratar sobre as diferentes propriedades de objetos matemáticos relacionados ao infinito (conjuntos, funções, operações, sequências, etc), pois as conclusões contraintuitivas das supertarefas propiciam a ressignificação ou, pelo menos, a reflexão sobre ideias e conceitos matemáticos.

Referências

BARKER, S. F. *Filosofia da matemática*. [S.l.]: Zahar, 1969.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.> Acessado em 10 de ago. de 2025.

CAMPOS, R. N. R. *Uma proposta de ensino de matemática na Educação de Jovens e Adultos utilizando três paradoxos*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal do Vale São Francisco, Juazeiro, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=95204&id1=2917>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

DORTA, F. *Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=46305&id1=5967>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

DOWDEN, B. *Zeno's Paradoxes*. [s. d.]. Internet Encyclopedia of Philosophy. Disponível em: <https://iep.utm.edu/zenos-paradoxes/#SH1a> Acesso em 10 de ago. de 2025.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*: An Introduction. 3ª. ed. Boston: Pearson, 2009.

MUNIZ, A. C. *Fundamentos de cálculo*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

OLIVEIRA, E. R. de. *O uso de frações contínuas e do paradoxo de Galileu: aplicações na resolução de problemas físicos na educação básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=508&id1=1503>. Acesso em 30 de jun. de 2025

QUINE, W. V. O. (Ed.). *The Ways of Paradox, and Other Essays*. Cambridge: Harvard University Press, 1976.

SALOMÃO, M. S. *Estudo e generalizações do paradoxo de Monty Hall na Educação Básica. Dissertação* (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=1063&id1=1325>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

SENTONE, F. G. *Paradoxos geométricos em sala de aula*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Tecnológica

Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=94543&id1=3125>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

SILVA, R. H. G. *Paradoxos matemáticos que ocorrem na Educação Básica*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2022. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171054214&id1=6531>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

STEWART, J. *Calculus*: Early Transcendentals. 8ª. ed. [s. l.]: Cengage Learning, 2015.

TAHAN, M. *As maravilhas da matemática*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.

VIANA, F. C. d. A. *Estudo e aplicações de probabilidade geométrica e paradoxos*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=36803&id1=27>. Acesso em 30 de jun. de 2025.

YAMAMOTO, T. A. S. U. *Atividades criativas para o ensino de probabilidade e geometria: o paradoxo de Monty Hall, o problema do macarrão e suas aplicações*. Dissertação (Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática) — PROFMAT - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=170600356&id1=5833>. Acesso em 30 de jun. de 2025.