



6

## VARIAÇÃO NAS INTERPRETAÇÕES DE UM PROBLEMA: FRAÇÃO UNITÁRIA E A RELAÇÃO ENTRE A PARTE E O TODO

Lúcia Cristina Silveira Monteiro<sup>1</sup>

### Eixo 5 – Formação de Professores

**Resumo:** Nesse trabalho será apresentada uma investigação filosófico/cognitiva acerca de possibilidades para a compreensão do conceito de fração e da relação entre parte/todo, conduzida por interpretações de um conhecido problema sobre divisão de uma herança. Compreendemos o ser humano como aquele que interpreta e produz semiose e que, nessa característica, reside seu acesso ao mundo. Portanto, durante formação de professores de matemática buscamos esboçar o que seria uma abordagem por semiótica aberta para a Educação Matemática partindo de interpretações do problema. A semiótica é naturalmente aberta para interação entre campos do conhecimento e assim, propomos expandir as interações entre campos da matemática, investigando o problema pela metodologia da complementaridade entre geometria e aritmética e pela formulação de problemas. Para o desenvolvimento dessa proposta, destacamos a característica da matemática como pensamento diagramático e por este caminho investigamos o potencial do citado problema para construir acessos ao conceito de fração unitária e da relação entre parte/todo, na variação da interpretação do problema. Essa variação da interpretação será mediada por representações que são construção de diagramas, processos em diagrama, pelo estímulo à formulação de problemas. Durante o desenvolvimento da investigação encontramos indícios de que esse tipo de abordagem aos conceitos dialoga com as dimensões da criatividade, pois apresentam fluência, flexibilidade e originalidade que podem conduzir para outras interpretações.

**Palavras-chave:** Criatividade. Diagramas. Formulação de problemas. Fração. Semiótica Aberta.

### 1. Introdução

Para a formação inicial e continuada de professores de Matemática são necessárias reflexões sobre os objetivos da Educação Matemática para a Educação Básica. Para essa reflexão listamos algumas questões presentes no desenvolvimento da matemática, como: formação de conceitos, compreensão dos fenômenos e estudos das formas ao redor, desenvolvimento do pensamento científico, diferentes raciocínios e o pensamento analítico, métodos para resolução de problemas, manipulação dos objetos matemáticos nas estruturas formalizadas, e percebemos que essas são questões que precisam ser consideradas para os objetivos para a Educação Matemática

Neste trabalho, com fundamentos teóricos filosófico/cognitivo, buscamos valorizar processos de ensino e aprendizagem que objetivam o desenvolvimento de conceitos, considerando possibilidades que podem surgir nas interpretações com

---

<sup>1</sup> Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Dr<sup>a</sup> em Educação Matemática. Maceió, Alagoas (AL), Brasil. [lucia.monteiro@cedu.ufal.br](mailto:lucia.monteiro@cedu.ufal.br). ORCID 0000-0001-9491-6869.





representações icônicas, ou diagramas que esboçam um dado problema ou situação significativa. Com esse enfoque, exploramos o desenvolvimento de raciocínios por resolução e formulação de problemas para favorecer o processo cognitivo conhecido como criatividade.

Para alcançar esses objetivos, buscamos aporte teórico: nas definições sobre o que é interpretação na Semiótica de Peirce e considerações sobre uma abordagem semiótica para a didática da matemática na visão de Otte; na diferença entre exercício e problemas, sob a ótica de Pólya, Da Ponte, Brown e Walter, Smith e Stein, entre outros; Na compreensão de Guilford, Torrance, Vygotsky, Vale et all, sobre o processo cognitivo conhecido como criatividade.

## 2 Semiótica na didática da Matemática: a interpretação da Interpretação

O ser humano é aquele que interpreta e produz semiose<sup>2</sup> e nessa característica está seu acesso ao mundo. Assim, aguçar o olhar sobre interpretações do conhecimento matemático por estímulo a construção de diagramas, traz possibilidades de uma abordagem por semiótica aberta para a Educação Matemática.

A noção de interpretação que consideramos aqui coincide com o conceito de interpretante encontrado nas teorias de Charles S. Peirce, que afirma: “o interpretante nada mais é do que outra representação” (1931-1935: CP. 1.339)<sup>3</sup>. Nessa teoria, encontramos categorias relacionadas a três tipos de interpretação, que são níveis de interpretação a serem atribuídos a um signo, denominados: O interpretante imediato, o interpretante dinâmico e o interpretante final.

Podemos resumir esta classificação dizendo que todos os factos empíricos *decifrados* são interpretantes dinâmicos. e, os interpretantes imediato e final são gerais e abstratos em diferentes níveis, variando desde o sensorial, no interpretante imediato, até o simbólico, no interpretante final.

As interpretações dos signos são, elas próprias, membros de uma série infinita, na qual cada interpretação é um signo de algum objeto para uma interpretação posterior, isto

---

<sup>2</sup> Semiose é o processo de transformação de um signo (Peirce, 2010).

<sup>3</sup> O número 1.339 lê-se: livro 1 de “Collected Paper”, parágrafo 339. Essa é a forma de citar a obra de Peirce, Toda obra citada aqui, encontra-se disponível na WEB, para leitura e download.





é, “sendo outro signo, o interpretante gerará necessariamente outro signo que funcionará como seu interpretante, e assim por diante, ad infinitum” (Santaella, 1995: 87), e, objeto-signo-interpretante são todos de natureza signíca.

## 2.1 Explorando diferentes signos, interpretações

Na semiótica de Peirce, encontramos três tipos de signos, todos indispensáveis aos raciocínio: O primeiro é o signo diagramático ou ícone, que exibe uma semelhança ou analogia com o objeto do discurso [...] O segundo é o índice, que como um pronome demonstrativo ou relativo, força a atenção para o objeto particular pretendido sem descrevê-lo [...] O terceiro, chamado de Símbolo, é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou uma conexão usual entre o nome e o significado específico (1931-1935: CP 1.369).

Peirce esclarece que, “[...] um diagrama matemático sempre contém índices como partes da representação icônica. E, também na medida em que tem um significado geral, um diagrama não pode mais ser considerado um ícone puro [...]” (1931:1935: CP 3.363).

Para Peirce, um diagrama é a construção de uma representação, é uma experimentação com construção e com observação dos resultados. No entanto, é importante, esclarece Peirce, que essas etapas sejam abarcadas por um sistema de representação e, por isso, ele escreve que “o diagrama é [...] predominantemente, um ícone de relações [...]. Isso deve ser percebido em um sistema perfeitamente consistente de representações, baseado em uma ideia simples e facilmente inteligível” (1931-1935: CP 4.418).

Segundo Otte (2006), “Índices e ícones [...] são essenciais para introduzir qualquer coisa nova no discurso matemático” (2006, p. 16). Uma propriedade distintiva do ícone é que, ao observá-lo diretamente, outras verdades sobre seu objeto podem ser descobertas, além daquelas que são suficientes para determinar sua construção. “[...] a atividade semiótica, que lida também com signos não simbólicos e não apenas com símbolos ou significados linguísticos, constitui a base da criatividade, da comunicação e do conhecimento” (Otte, 2006: 13). “O conhecimento é, portanto, um processo vivo” (Otte, 2006: 16), e abrange a interpretação por diferentes signos.





Para uma abordagem semiótica focada no holismo como tese epistemológica, é importante compreender que sempre há restrições na interpretação de um signo, quando este depende de um único sistema de representação. No meio do nosso raciocínio esquecemos em grande medida a abstração, e o diagrama pode ser para nós muitas coisas, e a própria coisa (PEIRCE, 1931:1935: CP 3.363). Segundo Otte, “o holismo como tese epistemológica enfatiza a coerência e a compreensão como critérios essenciais de significado e verdade” (2006: 12).

## **2.2 Desenvolver raciocínios: um passo para a criatividade**

Peirce descreve seu método científico com o caminho para se compreender algo, composto pela inter-relação dos raciocínios dedutivo, indutivo e abduutivo.

O raciocínio abduutivo é descrito na obra de Peirce como um julgamento antecipado e provisório, motivado pelo levantamento de hipóteses. O raciocínio abduutivo permite a produção de conhecimento justamente porque admite um valor lógico intermediário válido para investigação.

“A abdução, segundo Peirce, está mais relacionada à iconicidade” (1931-1935: CP 2.96). O raciocínio abduutivo seria o único tipo de raciocínio que origina novas ideias” (Peirce, 1931-1935: CP 5.171). Assim, o raciocínio abduutivo abre possibilidades para uma nova compreensão do que é visto, sendo, portanto, um tipo de raciocínio que valoriza a criatividade.

Segundo Peirce, o raciocínio imaginativo, sinônimo de raciocínio abduutivo, quando exercido por meio de diagramas, destaca a importância da representação visual para esse tipo de raciocínio, pois a visualização facilita e instiga a mente a formular hipóteses e novas ideias.

Yu (2003) simplifica os raciocínios propostos para serem desenvolvidos na metodologia científica de Peirce, dizendo que: a abdução cria, a indução verifica, e a dedução explica.

## **2.3 Criatividade: repetir, combinar e mudar**

Vygotsky (1998) esclarece que atividade de imaginação criativa se completa pela cristalização da imagem em uma forma externa. Para Otte (1993) o processo criativo opera na interação entre variação e repetição. Para esse autor, uma teoria sendo uma





interpretação de um fenômeno é também um processo de criar uma interpretação da interpretação dada, e assim por diante.

### 3. Formulando problemas abertos

Assim como Boavida, et al, 2008; Smith & Stein, 2011; Ponte: 11-34, 2011; Brown & Walter, 1995, buscamos destacar a relevância da comunicação do conhecimento científico estimulando o desenvolvimento de interpretações, promovendo investigação em aulas de matemática através da formulação e resolução de problemas.

Segundo esses autores, é necessário fazer a diferença entre exercícios e problemas e destacar a importância dos problemas abertos. Os problemas abertos podem ser descritos como problemas que possuem mais de um caminho para uma solução, ou diferentes soluções. Problemas abertos proporcionam o uso de diferentes representações e estimulam a comunicação, o raciocínio e a justificativa. Problemas abertos permitem conexões entre diversos tópicos matemáticos e entre a matemática e outras áreas do conhecimento. Esses mesmos autores também destacam a importância da visualização, explorar a percepção, na apresentação do problema.

Brown e Walter (2009) propõem que para compreender algo é necessário olhar o problema por diferentes perspectivas e/ou modificá-lo por uma estratégia indutiva.

Monteiro (2021; 2022: p. 579-586), sugere “provocar a semiose por meio de processos em diagramas”.

### 4. Explorando percepção por problemas abertos utilizando diagramas/quebra-cabeças

Monteiro (2021, pp. 163-167; 2022, pp. 579-586) descreve *processo em diagramas*, como uma semiose para provocar semiose. Para ilustrar essa proposta, apresentamos um conhecido problema interpretado com diagramas e processos em diagramas para formular problemas. O problema considerado será o problema da divisão de camelos<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> O homem que calculava. Malba Tahan, 83ª edição, Rio de Janeiro; São paulo, Record,2013. Disponível da WEB.





No citado problema temos o problema da divisão da herança, descrito mais ou menos assim: *Um pai deixou de herança para seus 3 filhos, 35 camelos. Ao primeiro filho ele deixou a metade dos camelos, ao segundo, um terço dos camelos e ao terceiro filho 1/9 do total dos camelos.* Por se tratar de uma divisão da herança expressa em frações unitárias podemos analisar algumas possibilidades para entender a questão.

Um procedimento provável ao nos depararmos com um problema desse tipo seria utilizar aritmética elementar por se compreender a fração unitária como uma indicação para uma divisão euclidiana aplicada ao montante de camelos. Nesse caso, o total dos camelos seria dividido pelos números expressos nos denominadores das frações, e chegaríamos a mesma constatação a que chegaram àqueles herdeiros, ou seja: ao primogênito, detentor de metade da herança, caberia, 17,5 camelos; ao segundo filho: 11,66..., camelos e ao terceiro, 3,88... camelos.

Conta a história que - *o homem que calculava*, um viajante que por ali passava com seu camelo, presenciou essa discussão sobre a divisão da herança e percebeu o descontentamento diante dos resultados a que os irmãos tinham chegado. Como percebemos, segundo o critério adotado pelos irmãos para dividir a herança, cada um teria direito a uma quantidade de camelos mais um *pedaço* de camelo, causando indignação entre eles. O viajante sugeriu outra solução.

Para solucionar o problema, o *homem que calculava* propôs o seguinte: ele acrescentaria o seu camelo aos 35 camelos da herança, totalizando 36 camelos para efetuar os cálculos. Depois, seguindo os critérios das frações de herança para cada filho, deixada pelo pai, ao primogênito, o viajante deu 18 camelos, ou seja, metade de 36, para o segundo filho, atribuiu 12 camelos, ou seja  $1/3$  de 36 camelos, e para o terceiro, 4 camelos, correspondente a  $1/9$ .

Portanto, todos receberam *camelos inteiros*, que incluíam *pedaços* a mais em seus montantes individuais de herança quando comparados a divisão que esses irmãos haviam efetuado. Sendo assim, todos concordaram que a divisão fosse feita conforme a orientação do homem que calculava.

Ao final da distribuição, o viajante esclareceu que a soma  $18+12+4=34$ , portanto, dos 36 camelos lhe sobrara o seu próprio camelo e um outro, que seria sua recompensa





por ter contribuído para resolver o problema. Os herdeiros não compreenderam como ele chegou àquela solução com ganhos, no entanto não houve oposição à solução dada.

O *homem que calculava* propôs a solução arriscando seu camelo, por ter percebido que o resultado da soma das frações  $1/2+1/3+1/9=17/18$ . Ou seja, em seu testamento, o pai não dividiu o total de seus camelos mas,  $17/18$ , uma fração menor que o *todo*. Pois, do total da herança de 35 camelos faltou  $1/18$  ser destinado a alguém, sendo assim, esta fração ficaria como pagamento para quem resolveu o problema, a contento de todos.

**Figura 1** – Diagrama representando as frações unitárias da divisão da herança e a fração da herança não distribuída pelo pai. Legenda da figura

Fonte: produzido pela autora

Um problema ao ser representado por diagramas geométricos pode ser investigado por outras interpretações do mesmo problema. Inicialmente é importante representar as frações unitárias com outros diagramas, o que podemos chamar de *processos em diagramas*. Essas construções servem para comparar com diagramas anteriores e dar continuidade a representação dos conceitos. No presente caso percebemos que alguns conceitos vão despontando, como, frações, frações equivalentes, múltiplos comuns a uma quantidade de números etc. Assim, torna-se importante continuar a interpretação do problema de Malba Tahan.

**Figura 2** – Diagrama representando as frações unitárias e um diagrama de passagem para compreensão da equivalência entre frações

Fonte: produzido pela autora

Por este caminho podemos explorar somas de frações unitárias que são iguais ao inteiro, ou menor que o inteiro, ou maior que o inteiro. Essas questões estão subjacentes a compreensão da relação entre parte/todo. Sugerimos que durante a formulação de





problemas sejam investigadas outras somas com três ou mais frações unitárias diferentes que explorem igualdade e desigualdades relacionada a um inteiro.

Voltando ao problema da divisão dos camelos, outra questão importante, é a análise do por quê  $18/18$  é um bom diagrama para fazer referência ao todo da herança dos camelos. Um conceito que deve surgir nessa reflexão são os múltiplos comuns, e ainda não necessariamente o menor entre esses. Essa análise pode nos conduzir a um processo nesse diagrama e podemos sugerir um diagrama que represente  $36/36$ , para explicar a divisão dos camelos.

No caso em debate, 18 é o menor múltiplo entre 2, 3 e 9. Mas, o diagrama com frações unitárias de  $1/36$  trazem outras possibilidades para compreensão da questão, podendo chegar ao conceito de classes de equivalências de frações que por sua vez pode ser compreendido pelo conceito de áreas equivalentes.

Pensar em variações do problema propondo a elaboração de diagramas torna-se importante porque pode significar o envolvimento de estudantes em diferentes níveis de compreensão e um caminho para uma rede de conceitos.

Por outro lado, interpretar problemas utilizando diferentes diagramas é um caminho para formular muitos problemas, como por exemplo: representar o problema da divisão dos camelos construindo uma régua de cuisenaire com cartolina, indo até a fração  $36/36$ ; representar o problema acima em um disco circular, utilizando software de Geometria Dinâmica, objetivando explorar outros conceitos pois podemos dividir um círculo em 18 setores circulares de  $20^\circ$  cada um, na ferramenta - *setor circular*; utilizar o Geogebra e dividir um círculo em 36 setores circulares de  $10^\circ$  cada um e comentar sobre os novos conceitos que surgem com essa abordagem, como ângulo, área de setor circular etc. Construir outra alternativa de subdivisão de uma superfície.

Lembremos que entre uma interpretação por diagramas e outra, muitos problemas intermediários podem parecer pertinentes. Atentemos para o fato de que esse problema se apresenta fluente porque a ideia da relação parte todo tratada por uma soma de frações unitárias diferentes, e que tenham o resultado de sua soma, menor, maior ou igual ao todo a que se refere, pode ser replicada variando a quantidade que representa o todo e variando o contexto de significado de um problema.

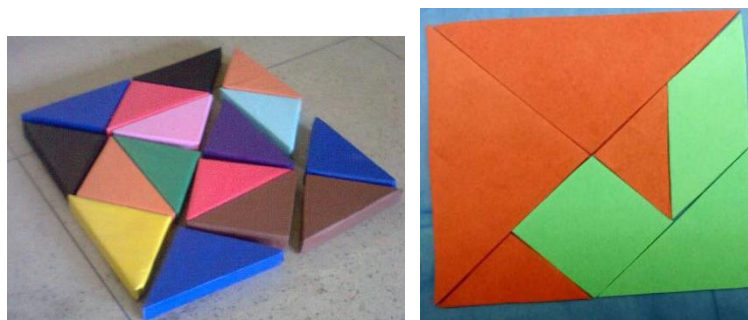
#### ***4.1 Construindo enunciados a partir de diagramas***





Um conhecido diagrama, o tangram chinês, com sete frações unitárias de área, e que têm algumas frações repetidas, sugere uma ideia dos *filhos trigêmos* para formulação do enunciado.

**Figura 3** – Diagrama, o tangram chinês, para representar as frações unitárias para o novo problema e um diagrama de passagem, 16/16



Fonte: produzido pela autora

Por exemplo, temos 31 cavalos de uma herança para distribuir, para o primogênito, a metade dos cavalos; para cada um dos trigêmos,  $1/8$  dos cavalos; e para o filho caçula,  $1/16$  dos cavalos. Observe que nessa variação, preservamos a ideia do problema anterior, ou seja: o fato de que uma fração unitária da herança não foi distribuída aos filhos e a fração distribuída corresponde ao total da herança menos uma fração unitária. Essa variação traz uma combinação de conhecimentos anteriores, pois, percebemos que o problema foi elaborado a partir de um conhecido diagrama que representa soma de frações unitárias diferentes.

Poderíamos nos perguntar, qual diagrama pode contribuir para explicação? Será que um diagrama  $32/32$  nos revela conceitos novos ou alguma relação? Como poderia ser desenhado esse diagrama?

Diferentes representações de um mesmo objeto do pensamento são complementares, pois como sugere Otte, sempre há restrições na interpretação de um signo quando este depende de um único sistema de representação, portanto também sugerimos que os conceitos devem anteceder ou serem apresentados concomitantemente às técnicas, para que haja interpretação por representação aritmética e algébrica. Mas, enfatizamos a importância dos diagramas porque sempre atuarão como referências visuais para compreensão do conceito.





Frege (2009) diria que é uma condição para a compreensão dos conceitos a complementaridade ente uma referência e um sentido, no caso dado pela visualização e pelo número, respectivamente. Para uma abordagem semiótica na Educação Matemática, Otte (1990) propõe a complementaridade entre Geometria e aritmética.

As pesquisas sobre estudo de frações indicam que a falta de compreensão do conceito de fração e da relação parte/todo é um problema que persiste. Sendo assim, sugerimos interpretação desses conceitos por processos em diagramas para formular problemas e para a construção de rede de conceitos com referência e sentido, para todos os ciclos da Educação Básica.

Destacamos a necessidade de formar professores de matemática para formular problemas, aceitando o desafio da utilização de ferramentas digitais, como softwares de Geometria Dinâmica. Com a utilização das ferramentas digitais, podemos visualizar, combinando diferentes frações unitárias por diferentes diagramas para interpretar a relação entre a parte e o todo.

Podemos estimular a construção de outros diagramas para formulação de novos problemas, tendo como referência a ideia presente na divisão dos camelos, objetivando outras variações do problema.

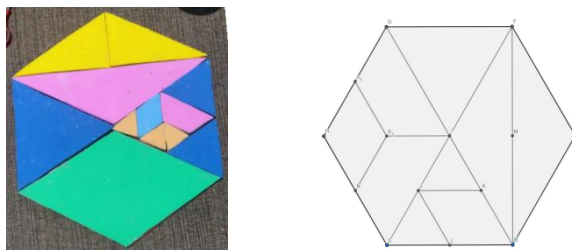
Por exemplo, durante a formação de professores, questões que envolvem decomposição de superfícies e de sólidos geométricos para explorar rede de conceitos em aulas de matemática têm se mostrado prolífica. Nesse sentido, decompor uma superfície e interpretar como um diagrama para explorar conceitos pode ser visto como uma variação da interpretação do problema apresentado e além disso carrega possibilidades para formulação de enunciados de novos problemas

Sendo assim, propomos elaborar processos em diagramas envolvendo fração e relação entre parte/todo interpretados em diferentes superfícies. Abaixo apresentamos exemplos com a decomposição do hexágono, que podem ser interpretados como somas de frações unitárias diferentes, conforme diagramas abaixo.





**Figura 4** – Diagrama, decomposição criteriosa de uma superfície hexagonal regular para o estudo de frações, a partir das frações unitárias, da relação entre a parte e o todo, e da elaboração de diagramas de passagem para formular problemas



Fonte: produzido por alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, 2005, orientados pela autora. No diagrama à direita propomos a construção de um diagrama de passagem com  $1/96$  da superfície hexagonal regular.

Durante formação inicial e continuada de professores de matemática percebemos que comunicar conhecimento matemático por meio de diagramas e *processos em diagramas* é um caminho que valoriza a formulação de hipóteses, partindo da visualização para explorar um processo cognitivo básico, a percepção. Diferentes percepções sobre o mesmo diagrama oferecem oportunidade para que futuros professores alcancem diferentes níveis de formulação de hipóteses, verificações e explicações etc. Essa prática possibilita transitar e conduzir processos de ensino pelas dimensões da criatividade, conforme Guilford (1967) e Torrance (1969), ou seja, pela fluência, flexibilidade, originalidade e elaborações.

## 5. Considerações

Explorar interpretações, variando representações de uma mesma ideia, modificando enunciados, partindo de novos problemas ou problemas conhecidos, indica ser um caminho do qual não devemos desviar, pois, possibilita: desenvolvimento do pensamento científico por diferentes raciocínios, estímulo ao pensamento analítico e construção de métodos para compreensão de problemas, complementaridade entre intuição e conceito rumo a formação de conceitos.

Essas possibilidades abrem caminhos que podem conduzir para manipulação dos objetos matemáticos em estruturas formalizadas. Além disso contribui para formar Educadores Matemáticos para formular problemas, e permite protagonismo de seus aluno, por estímulo à interpretação.





Podemos e devemos interpretar objetos do conhecimento matemático, explorando diagramas por utilização de ferramentas tecnológicas digitais, entretanto, é necessário estimular a manifestação de processos cognitivos desde as primeiras intuições partindo da percepção e conduzindo pelas dimensões da criatividade.

Abordar matemática por uma semiótica aberta, pode contribuir para formar educadores matemáticos que percebem a matemática como conhecimento construído, holístico e heurístico. Nessa perspectiva a Educação Matemática também pode perseguir o objetivo do desenvolvimento da argumentação lógica em diferentes níveis de representações para a Educação Básica, fundamental para enfrentamento de IAs.

Enfim, propomos oferecer ao humano o que é do humano, pois [...] “Enquanto na longa tradição do passado o ser humano se entendia como aquele que pensa, hoje ele se entende como aquele que compreende, e se explica como aquele que interpreta” (Gunter apud Ruedell, 2000: 27).

## Referências

BOAVIDA, A. M.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; VALE, I.; PIMENTEL, T. *Inovação e desenvolvimento curricular*. Ministério da Educação de Portugal: General Directorate of Innovation and curriculum development – DGIDC, Lisboa, 2008

BROWN, S.; WALTER, M. *The art of problem posing*. Mahwah: Erlbaum. Digital Printing. 2009.

FREGE, G. *Lógica e filosofia da linguagem*. Seleção, introd. Trad.e notas de Paulo Alcoforado. 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2009.

GUILFORD, J. P. *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill, 1967.

KANT, I. *Crítica da razão pura*. Trad. e notas Fernando C. Mattos – 2ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes; Bragança Paulista, SP: Editora Universitária São Francisco, 2013.

MONTEIRO. L. C. S. O conceito de infinito e a percepção de movimento. *In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife - Pe. Anais. Eixo-Comunicação Científica em Processos Cognitivos e Linguísticos na Educação Matemática, 2004.*

MONTEIRO, L.C.S. *Semiótica na Didática da Matemática: Interpretação da interpretação da interpretação...* Curitiba-PR: Appris, 2021.

MONTEIRO, L.C.S. Complementaridade na circularidade das representações: uma abordagem semiótica para a criatividade em matemática. *In: Educação Matemática em Pesquisa: Perspectivas e tendências*. Vol. 2, 2021, pp. 686-704.





MONTEIRO, L.C.S. Semiosis to Communicate Mathematics: Complementarity in the Circularity of Interpretations in Mathematics for the Development of Creativity. *In: The Mathematics Enthusiast*: 2022, Vol. 19 : No. 2 , Article 11. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1564>. Acesso: <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol19/iss2/11>

MONTEIRO, L.C.S. Sim, é necessário desenhar: semiótica aberta para comunicar matemática. *In: IX Seminário Internacional de Educação Matemática, Natal- RN, Anais [...]*, 2024.

OTTE, M. *Arithmetic and Geometry*: Some Remarks on the Concept of Complementarity. *In: Studies in Philosophy and Education* 10: 37-62. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 1990.

OTTE, M. *Complementarity, sets and numbers*. Educational Studies in Mathematics. *In: Kluwer Academic Publishers*. 2003.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *In: Educational Studies in Mathematics*, Vol 61, nº 1 / 2, Semiotic Perspectives in Mathematical Education: A PME Special Issue, pp. 11-38, 2006.

OTTE, M. *A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá, MT, EdUFMT, 2012.

PEIRCE, C. S.

CP - *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Volumes I-VI, ed. By Charles Hartshorne and Paul Weiss, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by nº of volume an paragraph). 1958.

PIMENTEL T. VALE, I. Raciocinar em geometria: O papel das tarefas. *In Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático*. Revista da Sociedade portuguesa de investigação em educação matemática, pp. 128-145. 2013.

PIMENTEL T. VALE, I. Raciocinar com padrões figurativos. *In Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático*. Revista da Sociedade portuguesa de investigação em educação matemática, pp. 204-222, 2013.

PÓLYA, G. (1954). *Mathematics and Plausible reasoning*. Vol.2: Patterns of plausible inference. New Jersey: Princeton University Press.

PÓLYA, G. (2003). *Como resolver problemas* (1ª edição) Lisboa. (Trabalho original publicado em 1945) Lisboa: Gradiva.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. *In: GTI (ed.). The teacher and curriculum development*. p. 11-34, Lisbon: APM, 2005.





RUEDELL, A. *Da representação ao sentido: através de Schleiermarch à hermenêutica atual*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2000.

SANTAELLA, L. *A teoria Geral dos signos: semiose e autogeração*. São Paulo, SP: Ática, 1995.

SMITH, M.; STEIN, M. *Practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM. 2011.

TORRANCE, E. P. *Creativity. What research says to the teacher*. Washington: National Education Association publisher, 1969.

VALE I. & Pimentel, T. Criatividade matemática individual e coletiva. *In Educação e Matemática*, Revista da associação de professores de Matemática. Colorpoint, Unipessoal Lda, Lisboa, (p.1-2), 2015.

VYGOSTKY, L.S. et al. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo. Brasil: Editora ícone, 1988.

