



# MODELAGEM COMPUTACIONAL E OTIMIZAÇÃO DE TRELIÇAS COM RESTRIÇÕES MECÂNICAS UTILIZANDO A FUNÇÃO FMINCON

Luiz Antonio Farani de Souza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Docente, Doutor, Curso de Engenharia Civil, Campus Apucarana-PR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. lasouza@utfpr.edu.br

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento e a aplicação de um modelo numérico-computacional, implementado em ambiente Scilab, para a otimização dimensional de treliças planas. A função objetivo é a minimização da massa estrutural, considerando como variáveis de projeto as áreas das seções transversais das barras. As restrições do problema incluem os limites de tensão normal e a condição de flambagem para barras comprimidas. O processo de otimização é conduzido com a função *fmincon*, utilizando o algoritmo do ponto interior (IPOPT). A formulação é combinada com o Método dos Elementos Finitos para análise linear estrutural. O modelo é validado por meio de um *benchmark* clássico da literatura - uma treliça em balanço - e os resultados numéricos obtidos são comparados com estudos anteriores. A busca por estruturas mais leves e eficientes é essencial em projetos de engenharia, notadamente quando se pretende reduzir custos e impactos ambientais. A utilização de métodos de otimização estrutural aliada a ferramentas computacionais de código aberto, como o Scilab, torna-se uma alternativa poderosa e acessível.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elementos Finitos; Flambagem; Otimização dimensional; Scilab.

## 1 INTRODUÇÃO

Engenheiros sempre se interessaram em criar projetos estruturais otimizados. Eles se preocupam não apenas com o custo da obra, mas também com a forma e o *design* das estruturas. O objetivo é sempre o mesmo: projetar estruturas que sejam confiáveis e econômicas ao mesmo tempo. Para isso, os engenheiros utilizam diversos métodos e algoritmos de otimização, que vão desde abordagens mais tradicionais até as mais modernas (Varma; Sarkar; Mondal, 2020).

Convencionalmente, os problemas de estruturas em treliça são classificados em três categorias inter-relacionadas, quais sejam: otimização de dimensionamento, otimização de forma e otimização de topologia. Os problemas de otimização de dimensionamento são tipicamente resolvidos buscando as áreas de seção transversal ideais para os elementos da treliça. O objetivo é minimizar o peso da estrutura, sujeito a restrições de desigualdade relacionadas às tensões nos membros, aos deslocamentos das juntas e às cargas de flambagem. Por outro lado, a otimização de forma é abordada encontrando as coordenadas ideais entre as juntas no projeto. Por fim, a otimização de topologia é necessária para encontrar a conectividade ideal entre as juntas (Alkhraisat *et al.*, 2023).

As categorias também podem ser combinadas para formar um novo problema de otimização e conduzir o processo de otimização para o problema combinado. O projeto ideal de treliças é considerado um problema interessante para os pesquisadores, devido ao alto desempenho das estruturas em treliça e à sua capacidade de serem utilizadas em uma ampla variedade de construções (Nemati; Zandi; Sabouri, 2024).

Um projeto otimizado, que atenda às exigências com o menor custo possível, tornou-se indispensável no campo da engenharia estrutural. Isso se deve ao fato de ser um aspecto fundamental em uma sociedade com desafios ecológicos e econômicos. As estruturas em treliça não apenas compõem uma vasta gama de construções, por exemplo a Torre Eiffel, como também são mais simples de analisar, projetar e otimizar do que outros tipos de estruturas (Kaveh; Rad, 2023).



A busca por estruturas mais leves e eficientes é fundamental em projetos de engenharia, sobretudo quando se pretende reduzir custos e impactos ambientais. A utilização de métodos de otimização estrutural aliada a ferramentas computacionais de código aberto, como o Scilab, torna-se uma alternativa poderosa e acessível. Assim, o presente trabalho se justifica ao propor um modelo de otimização robusto, com implementação em um ambiente livre, abordando restrições mecânicas como tensões e flambagem, o que confere maior realismo ao problema estrutural.

Do exposto, este artigo tem por objetivo desenvolver e aplicar um modelo numérico-computacional para a otimização estrutural dimensional de treliças com a função *fmincon* do programa livre Scilab, versão 2025.1.0 (Scilab, 2025), considerando como restrições as tensões normais e o efeito da flambagem nas barras comprimidas. As áreas das seções transversais das barras são adotadas como variáveis de projeto e a função objetivo refere-se à massa total da estrutura. A função *fmincon* é um solucionador de otimização com restrições lineares e não lineares de igualdade e desigualdade. Ela utiliza o algoritmo de Ponto Interior (IPOPT – *Interior Point OPTimizer*) como solucionador principal. Por padrão, uma aproximação da Hessiana do Lagrangiano é determinada com a fórmula L-BFGS (Souza, 2024). Para ilustrar a eficácia do código computacional implementado, um problema de treliça plana em balanço (Imai; Schmit Jr., 1991; Sonmez, 2011) amplamente estudado na literatura é analisado, com o objetivo de encontrar as áreas ótimas das barras. A estrutura é discretizada por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando por hipóteses a deformação infinitesimal e o comportamento constitutivo elástico linear.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção, a metodologia adotada neste trabalho é descrita, a qual engloba a formulação do problema de otimização dimensional de treliças, a formulação da matriz de rigidez do elemento finito de treliça 2D e a implementação computacional com o programa Scilab desenvolvido para otimizar estruturas.

### 2.1 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Muitos problemas de engenharia têm múltiplas soluções e selecionar a mais adequada pode ser uma tarefa complexa. Em problemas de otimização de dimensionamento, a principal tarefa é encontrar uma seção transversal ideal para os elementos de um sistema, minimizando a massa total da estrutura. Isso é expresso matematicamente como apresentado na Equação (1) (Sonmez, 2011):

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar } A = [A_1, A_2, \dots, A_n] \\
 & \text{Para minimizar } f(A) = \rho \sum_{i=1}^{nb} A_i L_i \quad (1) \\
 & \text{Sujeita a } |\sigma_i| \leq \sigma_{m\acute{a}x}, \text{ com } i = 1, \dots, nb \\
 & A_{m\acute{i}n} \leq A_i \leq A_{m\acute{a}x}, \text{ com } i = 1, \dots, nb
 \end{aligned}$$

sendo  $nb$  o número total de barras,  $\rho$  a massa específica do material,  $A_i$  a área da seção transversal da barra  $i$ ,  $L_i$  o comprimento da barra  $i$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  a tensão máxima,  $A_{m\acute{i}n}$  a área mínima (limite inferior) e  $A_{m\acute{a}x}$  a área máxima (limite superior).



## 2.2 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 2D

No contexto da análise de estruturas utilizando o MEF, a matriz de rigidez de um elemento de treliça 2D desempenha um papel fundamental na relação entre as forças nodais aplicadas e os deslocamentos resultantes. Essa matriz representa as propriedades de rigidez do elemento e como ele resiste à deformação sob carregamento (Bathe, 2016). A matriz de rigidez elementar  $k_{el}$  é obtida no sistema local de coordenadas de acordo com a Equação (2):

$$k_{el} = \frac{EA}{L} B \tag{2}$$

na qual  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $B$  é a matriz dada pela Equação (3):

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \tag{3}$$

A matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas  $K_{el}$  é calculada conforme a Equação (4):

$$K_{el} = R^T k_{el} R \tag{4}$$

na qual  $R$  é a matriz de transformação dada pela Equação (5):

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{5}$$

em que  $\theta$  é ângulo entre o eixo da barra e o eixo  $x$ .

## 2.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL COM A FUNÇÃO FMINCON

Com o objetivo de solucionar problemas de otimização não linear com múltiplas variáveis e restrições, o pacote externo *fmincon*, acessível no Gerenciador de Módulos ATOMS do Scilab, utiliza o Método do Ponto Interior (IPOPT). Desenvolvido por Michael Baudin e Stéphane Motteet, essa função emprega, por padrão, a técnica L-BFGS para aproximar a Hessiana do Lagrangiano, construindo uma sequência de iterações a partir de um ponto inicial definido. De acordo com os autores, o algoritmo IPOPT demonstra boa convergência global, mesmo em condições menos favoráveis, devido às suas elevadas taxas de convergência. Essencialmente, trata-se de um método de otimização global fundamentado na abordagem primal-dual do ponto interior (Souza, 2024).

A função *fmincon* do Scilab é integrada à análise estrutural da treliça, sendo combinada com o MEF. Para resolver os problemas de otimização estrutural, é criado um *script* que consiste de um texto com uma sequência de comandos que será posteriormente executado. O pseudocódigo empregado para a otimização dimensional do problema de treliça plana é apresentado de maneira simplificada na Figura 1.

```
//Sub-rotina para a determinação da função objetivo
function f=objfun(A)
soma=0;
```



```
for i=1:18
    soma=soma+L0(i)*A(i);
end
f=[rho*soma];
endfunction
//Sub-rotina para a determinação das restrições de igualdade e desigualdade
function [c, ceq]=confun(A)
    Chama a sub-rotina para determinar a matriz de rigidez K
    Chama a sub-rotina para determinar as tensões normais nas barras f
    //Restrições não lineares de desigualdade
    c = [abs(vtens)-20;
        abs(vtens(2))-4*E(2)*A(2)/L0(2)^2;
        abs(vtens(3))-4*E(3)*A(3)/L0(3)^2;
        abs(vtens(6))-4*E(6)*A(6)/L0(6)^2;
        abs(vtens(7))-4*E(7)*A(7)/L0(7)^2;
        abs(vtens(10))-4*E(10)*A(10)/L0(10)^2;
        abs(vtens(11))-4*E(11)*A(11)/L0(11)^2;
        abs(vtens(14))-4*E(14)*A(14)/L0(14)^2;
        abs(vtens(15))-4*E(15)*A(15)/L0(15)^2;
        abs(vtens(18))-4*E(18)*A(18)/L0(18)^2];
    //Restrições não lineares de igualdade
    ceq = [A(1)-A(4); A(4)-A(8); A(8)-A(12); A(12)-A(16); A(2)-A(6); A(6)-A(10); A(10)-A(14); A(14)-A(18);
        A(3)-A(7); A(7)-A(11); A(11)-A(15); A(5)-A(9); A(9)-A(13); A(13)-A(17)];
endfunction
//Aproximação inicial
A0 = [0.1*ones(1, 18)];
//Área mínima admissível para as barras (limite inferior)
lb = [0.1*ones(1, 18)];
//Área máxima admissível para as barras (limite superior)
ub = [50*ones(1, 18)];
//Execução da função fmincon
opt = optimoptions ("fmincon", "Display","iter", "MaxFunctionEvaluations",200, "MaxIterations",1000,
"FunctionTolerance",1.e-8, "OptimalityTolerance",1.e-8);
[A,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon ( objfun , A0,[],[],[],lb,ub,confun,opt);
//Pós-processamento (resultados mostrados no Console)
disp('Área das barras (in²):',A)
disp('Massa total f(A):',fval)
disp(output)
```

**Figura 1:** Pseudocódigo para a otimização estrutural com a função *fmincon* do Scilab.

**Fonte:** O autor (2025).

As variáveis globais do pseudocódigo incluem as propriedades do material (módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e massa  $\rho$ ), os comprimentos indeformados das barras ( $L_i$ ) da treliça, a tensão normal máxima ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) e os parâmetros da malha de Elementos Finitos. São informados ao pseudocódigo os seguintes parâmetros de entrada para realizar o processamento: o vetor  $A0$  referente à estimativa inicial para as áreas da seção transversal das barras; o vetor  $A_{min}$  que define o limite inferior das áreas; e o vetor  $A_{max}$  que especifica o limite superior das áreas. Duas funções (*function*) são criadas no pseudocódigo, a saber: a primeira refere-se à função  $f = objfun(x)$ , na qual é informada a função objetivo; e a segunda refere-se à função  $[c, ceq] = confun(x)$ , em que são informadas as restrições de desigualdade e igualdade.

A solução é obtida executando-se a função *fmincon*, a qual retorna o vetor  $A$ , que é a solução ótima do problema de otimização, e *fval*, que é o valor da função objetivo em  $A$ . O parâmetro de entrada *opt* corresponde à lista de parâmetros opcionais utilizados para configurar o comportamento do *solver*. O parâmetro de saída *output* fornece as informações detalhadas acerca do processo de otimização, incluindo o número de iterações realizadas e o número de avaliações da função durante a busca pela solução ótima.

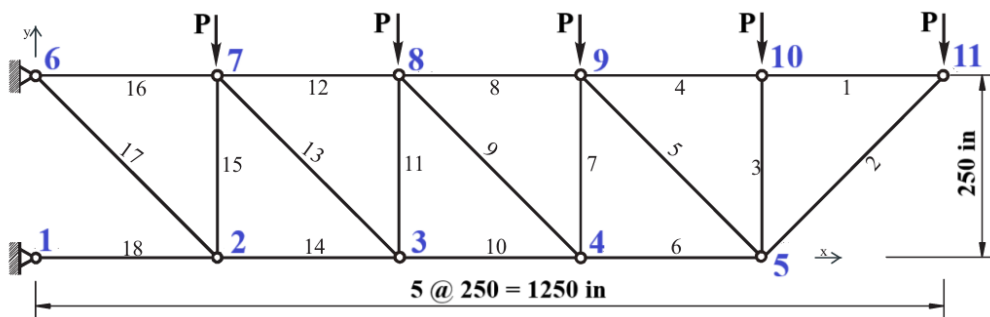


### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 apresenta a geometria e a condição de carregamento da treliça em balanço, consistindo de 18 barras e 11 nós. A estrutura é submetida a uma única condição de carga, que é uma série de forças concentradas de intensidade  $P = 20$  kip atuando nos nós do banzo superior. Todos os membros são constituídos de material com módulo de elasticidade longitudinal de  $E = 1,0 \cdot 10^4$  ksi e massa específica de  $\rho = 0,10$  lb/in<sup>3</sup>. A restrição de tensão é definida como  $\sigma_{m\acute{a}x} = 20$  ksi para barras à tração ou à compressão. A restrição de flambagem de Euler também é levada em consideração para membros sujeitos à compressão. A tensão de flambagem de Euler para o  $i$ -ésimo membro é calculada conforme a Equação (6):

$$\sigma_i = \frac{4EA_i}{L_i^2} \quad (6)$$

em que  $L_i$  e  $A_i$  são o comprimento e a área da seção transversal da barra  $i$ , respectivamente. O número de variáveis de tamanho independentes é reduzido a quatro grupos da seguinte forma: (i) elementos 1, 4, 8, 12 e 16; (ii) elementos 2, 6, 10, 14 e 18; (iii) elementos 3, 7, 11 e 15; (iv) elementos 5, 9, 13 e 17. A área mínima da seção transversal das barras é  $A_{m\acute{i}n} = 0,10$  in<sup>2</sup> e a área máxima da seção transversal é definida  $A_{m\acute{a}x} = 50$  in<sup>2</sup>. Como estimativa inicial para as áreas das barras, adota-se  $A^{(0)} = 0,10$  in<sup>2</sup>.



**Figura 2:** Modelo estrutural da treliça em balanço.  
 Fonte: O autor (2025).

A Tabela 1 apresenta a razoável concordância entre os valores obtidos com a função *fmincon* e os resultados de Imai e Schmit Jr. (1991) e Sonmez (2011). No processo de otimização realizado neste estudo, as barras da treliça são agrupadas em conjuntos com áreas de seção transversal idênticas. Essa estratégia, além de reduzir o número de variáveis independentes do problema matemático, reflete práticas adotadas em projetos reais de estruturas metálicas e de madeira. As vantagens dessa estratégia são: racionalização do projeto, facilidade construtiva, redução de custos, estética e padronização.

**Tabela 1:** Áreas da seção transversal das barras em in<sup>2</sup> e massa total em lb.

Barras	fmincon <sup>(1)</sup>	Imai e Schmit Jr. (1991)	Sonmez (2011)
$A_1 = A_4 = A_8 = A_{12} = A_{16}$	10,0	9,998	10,000
$A_2 = A_6 = A_{10} = A_{14} = A_{18}$	21,650635	21,650	21,651
$A_3 = A_7 = A_{11} = A_{15}$	12,5	12,500	12,500



$A_5 = A_9 = A_{13} = A_{17}$	7,0710678	7,072	7,071
Massa total	6430,5291	6430,000	6430,529

(1) A convergência ocorreu com 16 iterações.

Fonte: O autor (2025).

Um aspecto relevante do modelo é a inclusão explícita da verificação da flambagem de Euler como restrição de desigualdade nas barras comprimidas. A imposição da restrição de flambagem torna o problema mais realista, porque limita a área mínima admissível das barras comprimidas com base em sua estabilidade. Isso tem reflexo direto nas soluções dos grupos de barras verticais e barras do banzo inferior, que são propensos a esforços de compressão.

A Figura 3 exibe a curva de evolução do valor da função objetivo (massa total da treliça) ao longo das iterações realizadas pela função *fmincon*. Um dos aspectos no uso de algoritmos de ponto interior é a escolha da aproximação inicial  $A_0$  para o processo iterativo. Os resultados numéricos obtidos indicam que a escolha de uma estimativa conservadora (respeitando os limites mínimos das áreas) é suficiente para conduzir o algoritmo até a solução global ótima em 16 iterações. A solução converge rapidamente a partir da 12ª iteração ( $f(A_{12}) = 6259,773$  lb), atingindo um valor estável próximo de 6430 lb para as iterações subsequentes.

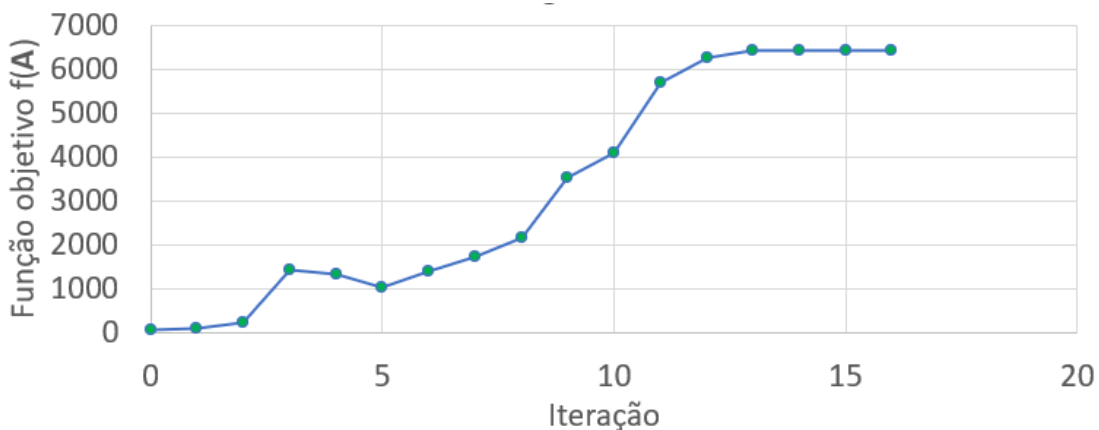


Figura 3: Curva iteração versus valor da função objetivo.

Fonte: O autor (2025).

A Figura 4 apresenta a distribuição das tensões normais (em ksi) obtidas nas barras da treliça após o processo de otimização. Essa análise é essencial para verificar a adequação estrutural da solução encontrada, principalmente no que tange ao atendimento das restrições de projeto.

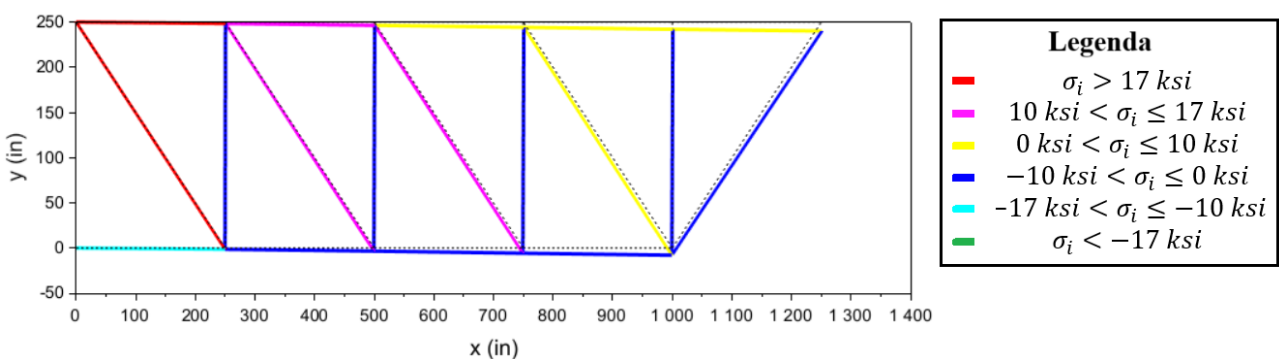


Figura 4: Distribuição das tensões normais nas barras.

Fonte: O autor (2025).



Segundo a Figura 4, observa-se que as tensões se mantêm dentro do limite admissível de  $\pm 20$  ksi, tanto para membros tracionados quanto comprimidos, confirmando a eficiência das restrições implementadas no código computacional. Isso confirma que a função de restrição não linear implementada no modelo é eficaz em limitar os esforços normais ao valor máximo permitido pelo material, evitando situações de falha por tensão normal (critério de resistência) ou instabilidade por flambagem (critério de estabilidade).

#### 4 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento e a aplicação de um modelo numérico-computacional para a otimização dimensional de treliças planas, utilizando a função *fmincon* em ambiente Scilab, integrada ao Método dos Elementos Finitos. A formulação considera tanto restrições de tensão normal quanto de flambagem, promovendo uma modelagem mais realista e aplicável a estruturas submetidas a carregamento estático.

Os resultados numéricos demonstraram razoável concordância com estudos disponíveis da literatura, evidenciando a validade e a precisão do modelo implementado. A convergência foi alcançada em apenas 16 iterações, o que atesta a eficiência do algoritmo de ponto interior mesmo a partir de aproximações iniciais conservadoras. Além disso, a estratégia de agrupamento das áreas das barras mostrou-se eficaz, tanto na redução da dimensionalidade do problema quanto na aproximação das práticas adotadas em projetos reais.

A inclusão explícita das restrições de flambagem como desigualdades contribuiu para a robustez do modelo, evitando soluções inviáveis do ponto de vista estrutural. A distribuição das tensões após a otimização respeitou todos os limites admissíveis, assegurando o desempenho seguro da estrutura.

Portanto, conclui-se que o modelo numérico implementado é uma ferramenta eficiente, acessível e robusta para a otimização estrutural de treliças, sendo aplicável tanto em contextos acadêmicos quanto em práticas profissionais de engenharia. Sua adoção pode contribuir para o desenvolvimento de projetos mais leves, seguros e economicamente viáveis, notadamente quando associado a plataformas de código aberto como o Scilab.

Por fim, como perspectivas futuras, destaca-se a possibilidade de: extensão para análise dinâmica e não linear; inclusão de otimização de forma e topologia; aplicações em treliças espaciais; e acoplamento com restrições ambientais e econômicas.

#### 5 AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da Universidade Estadual de Maringá pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

#### REFERÊNCIAS

ALKHRAISAT, H. *et al.* Size optimization of truss structures using improved grey wolf optimizer. **IEEE Access**, v. 11, p. 13383-13397, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3243164>.



BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2<sup>a</sup> Ed. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.

KAVEH, A.; RAD, A. S. Metaheuristic-based optimal design of truss structures using algebraic force method. **Structures**, v. 50, p. 1951-1964, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.123>.

IMAI, K.; SCHMIT JR., L. A. Configuration optimization of trusses. **Journal of the Structural Division**, v. 107, n. 5, p. 745-756, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0005702>.

NEMATI, M.; ZANDI, Y.; SABOURI, J. Application of a novel metaheuristic algorithm inspired by connected banking system in truss size and layout optimum design problems and optimization problems. **Scientific Reports**, v. 14, n. 1, p. 27345, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-79316-z>.

SCILAB, versão 2025.1.0. Dassault Systèmes, 2025. Disponível em: <https://www.scilab.org/download/scilab-2025.1.0>.

SONMEZ, M. Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures. **Applied Soft Computing**, v. 11, n. 2, p. 2406-2418, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2010.09.003>.

SOUZA, L. A. F. Uso do programa Scilab na resolução de problemas da resistência dos materiais com a função fmincon. # Tear: **Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, 2024. DOI: <https://doi.org/10.35819/tear.v13.n2.a7414>.

VARMA, T. V.; SARKAR, S.; MONDAL, G. Buckling restrained sizing and shape optimization of truss structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 146, n. 5, p. 04020048, 2020. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0002590](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002590).