

CONTROLADOR FUZZY BASEADO EM UM MÉTODO DE TOMADA DE DECISÃO FUZZY

Ítalo T. F. da Silva¹, Thadeu R. B. Milfont¹, Ivan Mezzomo¹

¹Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, Mossoró-RN, Brasil
(italothiagofernandes@hotmail.com)

Resumo: Os Conjuntos Fuzzy n-Dimensionais $[0,1]^n$ são conjuntos baseados nos Conjuntos Fuzzy n-Dimensionais Ordenados $L_n([0,1])$, sem a necessidade de ordenação das entradas. Neste artigo, nós investigamos a aplicabilidade destes conjuntos em um controlador fuzzy. Usamos um método de tomada de decisão multicritério para controlar um sistema de acondicionamento de embalagens, de uma empresa de alimentos. Usamos funções de agregação, ordens parciais e ordens admissíveis para tratar os dados e dar um resultado final para cada alternativa analisada.

Palavras-chave: Método de Tomada de Decisão; Controlador Fuzzy; Processo de Acondicionamento; Funções de Agregação; Conjunto Fuzzy n-Dimensional.

INTRODUÇÃO

O conceito de conjuntos fuzzy foi introduzido por Zadeh em 1965 (L.A. Zadeh, 1965). Um conjunto fuzzy A sobre um conjunto não vazio X é uma aplicação $\psi_A : X \rightarrow [0,1]$, que a cada $x \in X$ associa um valor em $[0,1]$. Existem várias extensões do conjunto fuzzy de Zadeh, como: os conjuntos fuzzy intervalares, conjuntos fuzzy hesitantes e conjuntos fuzzy intuicionistas (H. Bustince et. al., 2016) (B. Pekala, 2019) (Z. Xu, 2014) (R. M. Rodríguez et. al., 2016). Aqui nós usaremos o conjunto fuzzy n-dimensional $[0,1]^n$, que é inspirado no conjunto fuzzy n-dimensional ordenado $L_n([0,1])$ (B. Bedregal et. al., 2011) (Y. Shang et. al., 2010).

Método de tomada de decisão são usados em diversos contextos (J. M. Merigó e M. Casanova, 2011) (D. Bouyssou et. al., 2009) (Z. Xu e X. Zhang, 2013), aqui propomos um método com sete etapas, que nos ajuda a decidir quais serão as alternativas adequadas dentro de um determinado processo. O método usa funções de agregação n-dimensionais m-árias para tratar os dados e gerar os escores finais referentes a cada alternativa. Usamos ordens parciais e ordens admissíveis para comparar os escores finais e classificar cada um deles. Para garantir a eficácia do método proposto a validação apresentada em (Milfont et al. 2021a) será usada e mostraremos que cada item do método de validação é satisfeito.

Sistemas de empacotamento, são responsáveis pelo acondicionamento de mercadorias, assegurando a proteção do produto durante as etapas de armazenamento e distribuição logística até a entrega ao consumidor final. O conjunto fuzzy n-dimensional $[0,1]^n$ será utilizado, junto com um método de tomada de decisão, para modelar parte de um controlador fuzzy. Este controlador fuzzy é aplicado em um processo de acondicionamento de uma empresa de alimentos. O método apresentado aqui é aplicado periodicamente, com o objetivo de controlar a qualidade do processo, utilizando para isso algumas amostras que são retiradas de uma esteira antes de chegar na empilhadeira.

Este artigo está organizado como segue: na Seção Material e Métodos apresentamos alguns conceitos importantes como conjunto fuzzy n-dimensional $[0,1]^n$, ordens admissíveis, funções de agregação m-dimensionais, funções de agregação n-dimensionais m-ária, alguns resultados envolvendo essas funções e alguns exemplos. Também propomos o Método de tomada de decisão de grupos de multicritério (MCGDM) em um controlador fuzzy. Na seção Resultados e Discussão apresentamos uma validação dos escores do método de tomada de decisão em grupos de multicritério (MCGDM) com as ordens escolhidas, o processo de acondicionamento e o problema de controle de qualidade em um processo de acondicionamento de embalagens. Finalmente, na

seção Conclusão nós apresentamos as observações finais e discutimos os trabalhos futuros.

MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção apresentaremos as definições, conceitos e o método de tomada de decisão em grupos de multicritério (MCGDM), baseado em (Milfont et. al. 2021a), que serão utilizados neste trabalho. Para mais detalhes sobre (MCGDM) também veja (C. L. Hwang e A. S. M. Masud, 1979) (S. J. Chen e C. L. Hwang, 1992) (C. L. Hwang e K. Yoon, 1981).

Conjunto fuzzy n-dimensional $[0,1]^n$

Aqui nós apresentaremos alguns conceitos básicos como, o conjunto fuzzy n-dimensional, ordens definidas neste conjunto, funções de agregação e alguns exemplos.

O conjunto fuzzy n-dimensional ordenado $L_n([0,1])$ é o conjunto cujos elementos são n-tuplas ordenadas, ou seja, os elementos são da forma $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, tais que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ (B. Bedregal et. al., 2011) (Y. Shang et. al., 2010). Consideraremos aqui neste trabalho o conjunto $[0,1]^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) / x_i \in [0,1]\}$ o qual chamaremos de conjunto fuzzy n-dimensional, que é baseado no conjunto $L_n([0,1])$. Usaremos as notações em $[0,1]^n$: $\leq_n$ para uma ordem qualquer, $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$ para a i-ésima projeção dos elementos e $/0/, /1/$ para os elementos $(0, \dots, 0)$ e $(1, \dots, 1)$, respectivamente. A ordem, em $[0,1]^n$, dada por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \leq_n^p \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \pi_i(\mathbf{x}) \leq \pi_i(\mathbf{y})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, será denotada por $\leq_n^p$.

Definição 1 (L. De Miguel et al., 2017). Uma ordem linear (total) $\leq_n$ em $[0,1]^n$ é chamada de admissível se para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$, $\mathbf{x} \leq_n \mathbf{y}$ sempre que $\mathbf{x} \leq_n^p \mathbf{y}$.

Exemplo 1. Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$ e $\tau : [0,1]^n \rightarrow [0,1]^n$ uma permutação. Então,

$$\mathbf{x} \leq_\tau \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}; x_{\tau(k)} < y_{\tau(k)} \text{ e } x_{\tau(i)} = y_{\tau(i)},$$

$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, é uma ordem admissível. Quando τ é a identidade Id , $\leq_{Id}$ é chamada ordem lexicográfica e se $\tau(i) = n - i + 1$ então $\leq_\tau$ é chamada ordem anti-lexicográfica.

Definição 2. Uma função

$A : \underbrace{[0,1]^n \times \dots \times [0,1]^n}_{m\text{-vezes}} \rightarrow [0,1]^n$ é uma agregação

n-dimensional m-ária com relação a ordem $\leq_n$ se satisfaz:

$$I) A(/0/, \dots, /0/) = /0/ \text{ e } A(/1/, \dots, /1/) = /1/;$$

$$II) \text{ Se } \mathbf{x}_i \leq_n \mathbf{y}_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}, \text{ então } A(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \leq_n A(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m).$$

Quando $n = 1$ e A satisfaz I) e II) então $A : [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ é chamada de função de agregação m-dimensional.

O teorema a seguir é baseado na versão para conjuntos fuzzy n-dimensionais ordenados $L_n([0,1])$ (B. Bedregal et al., 2012)

Teorema 1. Sejam $A_1, \dots, A_n$ funções de agregação m-dimensionais. Então

$$\widetilde{A_1 \dots A_n} : \underbrace{[0,1]^n \times \dots \times [0,1]^n}_{m\text{-vezes}} \rightarrow [0,1]^n \text{ definida por}$$

$$\widetilde{A_1 \dots A_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = (A_1(\pi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_1(\mathbf{x}_m)), \dots, A_n(\pi_n(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_n(\mathbf{x}_m)))$$

é uma função de agregação n-dimensional m-ária com relação a $\leq_n^p$.

Prova. É fácil observar que: $\widetilde{A_1 \dots A_n}$ está bem definida, $\widetilde{A_1 \dots A_n}(/0/, \dots, /0/) = /0/$ e $\widetilde{A_1 \dots A_n}(/1/, \dots, /1/) = /1/$. Agora, se $\mathbf{x}_i \leq_n^p \mathbf{y}_i$ então $\pi_j(\mathbf{x}_i) \leq \pi_j(\mathbf{y}_i)$, logo $A_j(\pi_j(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_j(\mathbf{x}_m)) \leq A_j(\pi_j(\mathbf{y}_1), \dots, \pi_j(\mathbf{y}_m))$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Portanto, $\widetilde{A_1 \dots A_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \leq_n^p \widetilde{A_1 \dots A_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$.

Teorema 2. Sejam $A_1, \dots, A_n$ funções de agregação m-dimensionais. Então

$$\widetilde{A_1 \dots A_n} : \underbrace{[0,1]^n \times \dots \times [0,1]^n}_{m\text{-vezes}} \rightarrow [0,1]^n \text{ definida por}$$

$$\widetilde{A_1 \dots A_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = (A_1(\pi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_1(\mathbf{x}_m)), \dots, A_n(\pi_n(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_n(\mathbf{x}_m)))$$

é uma função de agregação n-dimensional m-ária com relação a $\leq_{Id}$.

Prova. Semelhante a do Teorema 1.

Observação 1. Quando $\widetilde{A_1} = \dots = \widetilde{A_n} = A$, denotaremos $\widetilde{A_1 \dots A_n}$ apenas por $\widetilde{A}$.

Exemplo 2. Considere a função de agregação m-dimensional $A(x_1, \dots, x_m) = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$. De acordo com o Teorema 1, temos que $\widetilde{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = (A(\pi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_1(\mathbf{x}_m)), \dots, A(\pi_n(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_n(\mathbf{x}_m)))$ é uma função de agregação n-dimensional m-ária com relação a $\leq_n^p$.

Exemplo 3. Considere a função de agregação m-dimensional $A(x_1, \dots, x_m) = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}$. De acordo com o Teorema 2, temos que $\widetilde{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = (A(\pi_1(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_1(\mathbf{x}_m)), \dots, A(\pi_n(\mathbf{x}_1), \dots, \pi_n(\mathbf{x}_m)))$ é uma função de agregação n-dimensional m-ária com relação a $\leq_{Id}$.

Método de tomada de decisão de grupos de multicritério em um controlador fuzzy

O método proposto tem a finalidade de analisar um conjunto de alternativas, considerando alguns critérios e a opinião de alguns especialistas, que avaliam o quanto cada alternativa satisfaz cada critério e compara o resultado com uma entrada de referência fixada.

Seja $A = \{a_1, \dots, a_p\}$ ($p \geq 2$) o conjunto de alternativas, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ ($n \geq 2$) o grupo de especialistas e $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ ($m \geq 2$) o conjunto de atributos ou critérios. Com a opinião de cada especialista e_k geramos a matriz de decisão $R^k = (R_{ij}^k)_{p \times m}$, tal que cada R_{ij}^k representa a opinião do especialista e_k para a alternativa a_i referente ao critério c_j , que é expresso num valor em $[0,1]$.

A seguir, nós propomos o seguinte (MCGDM) genérico:

Etapa 1. Para cada especialista $e_k \in E$, gerar a matriz R^k com suas avaliações de cada alternativa referente a cada critério.

Etapa 2. Escolher o vetor de referência $\mathcal{R} = (r_1, \dots, r_n) \in [0,1]^n$ e estabelecer o mínimo de alternativas a_i que devem satisfazer a condição final.

Etapa 3. Escolher o vetor de pesos estritamente positivo $w = (w_1, \dots, w_m)$ que reflete a importância de cada critério tem no processo de decisão.

Etapa 4. Gerar a matriz coletiva $R^* = (R_{ij}^*)_{p \times m}$, onde cada $R_{ij}^* = w_j(R_{ij}^1, \dots, R_{ij}^n) \in [0,1]^n$.

Etapa 5. Escolher uma ordem $\leq_n$ em $[0,1]^n$ e uma função de agregação n-dimensional m-ária A , com respeito a $\leq_n$.

Etapa 6. Aplicar A em cada linha de R^* , da Etapa 4, ou seja $s_i = (s_1^i, \dots, s_n^i) = A(R_{i1}^*, \dots, R_{im}^*)$ é o $[0,1]^n$ -escore da alternativa a_i .

Etapa 7. Verificar, usando o vetor de referência $\mathcal{R}$ da Etapa 2. e a ordem da Etapa 5. se cada s_i satisfazem $\mathcal{R} \leq_n s_i$.

Este método de tomada de decisão (MCGDM) será usado para modelar parte de um controlador fuzzy em um processo de condicionamento (ver Figura 1).



Figura 1. Controlador Fuzzy.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Validação dos escores do método de tomada de decisão em grupos de multicritério (MCGDM) com as ordens escolhidas

Aqui nós utilizaremos três princípios básicos para validar o método apresentado, esses princípios foram introduzidos em (Milfont et al., 2021a), são eles:

Monotonicidade: se o valor de algum R_{ij}^k crescer então a classificação do a_i não pode decrescer.

Dominação: se a alternativa a_i é mais bem avaliada que a_j em todos os critérios e na opinião de todos os especialistas, então a classificação de a_i tem que ser melhor que a classificação de a_j .

Insensibilidade por indexação: A ordem (indexação) dos expert, alternativas e critérios é irrelevante para o resultado final, ou seja, para a classificação das alternativas.

As ordens e agregações escolhidas, para implementar o método, serão $\leq_n^p$ e $\leq_{Id}$ e agregações dos Exemplo 2 e Exemplo 3. Vamos mostrar que os $[0,1]^n$ - escores satisfazem os princípios estabelecidos:

Vamos considerar inicialmente a ordem $\leq_n^p$, onde mostraremos que o primeiro princípio (**Monotonicidade**) é verdadeiro para o método proposto. De fato, se algum R_{ij}^k cresce para $R_{ij}^{k'}$ para algum $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ e $k \in \{1, \dots, n\}$, temos que $R_{ij}^k \leq R_{ij}^{k'}$ isso implica que $R_{ij}^* \leq_n^p R_{ij}^{*k'}$ e como a agregação é monótona crescente $s_i \leq_n^p s_i'$, logo a classificação de a_i não decresce. Para a ordem $\leq_{Id}$, temos que o primeiro princípio também é verdadeiro, tendo em vista que $\leq_{Id}$ é admissível.

Para o segundo princípio (**Dominação**), vamos considerar inicialmente a ordem $\leq_n^p$. Suponha que a_i

seja mais bem avaliado que a_{i_2} em todos os critérios e com relação a todos os especialistas, assim $R_{i_2j}^k \leq R_{i_1j}^k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ e todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Então $R_{i_2j}^* \leq_n^p R_{i_1j}^*$ como a agregação é monótona crescente temos que $s_{i_2} \leq_n^p s_{i_1}$, logo a classificação de a_{i_1} tem que ser melhor que a classificação de a_{i_2} . Para a ordem $\leq_{Id}$, temos que o segundo princípio também é verdadeiro, tendo em vista que $\leq_{Id}$ é admissível.

Para o terceiro princípio (**Insensibilidade por indexação**), considere a permutação μ_x de $\{1, \dots, x\}$ com $x \in \{p, m, n\}$, i. é. $\mu_x : \{1, \dots, x\} \rightarrow \{1, \dots, x\}$ para cada $x \in \{p, m, n\}$, defina $P_{ij}^k = R_{\mu_p(i)\mu_m(j)}^{\mu_n(k)}$ e t_i o $[0,1]^n$ - escore da alternativa $b_i = a_{\mu_p(i)}$ obtida pelo método. Como as agregações escolhidas são simétricas, i.e. não dependem da ordem dos elementos, a classificação final não é alterada.

Isto mostra que os $[0,1]^n$ - escores do (MCGDM) satisfazem os princípios estabelecidos em (Milfont et al., 2021a).

Processo de acondicionamento

O controle de qualidade em uma empresa que trabalha com alimentos é um fator importante e que tem sido alvo de estudos recentemente (S. Puttero et. al., 2024) (K. B. Chhetri, 2024). No nosso caso específico, o controle de qualidade é feito num Processo de acondicionamento. Este processo é responsável pelo acondicionamento de alimentos, assegurando a proteção do produto durante as etapas de armazenamento e distribuição logística até a entrega ao consumidor final. Os três principais tipos de embalagem utilizados nesse processo de acondicionamento são:

Embalagens primárias: são categorizadas como o primeiro nível, é a camada mais próxima do produto, mantendo contato direto e geralmente é a única embalagem que o consumidor verá. Tem a função de proteção e salvaguarda do produto contra danos físicos, químicos e biológicos, e manifesta o design gráfico, que visa otimizar a percepção de valor e estimular a aquisição por parte do consumidor;

Embalagens secundária: são as que agrupam várias embalagens primárias, organizando e melhorando o manuseio, podem ser do tipo pacotes plásticos comumente chamados de fardos ou também agrupados em caixas;

Embalagens terciárias: são quando os produtos secundários são agrupados em grandes quantidades para facilitar o transporte e o armazenamento em grandes volumes. São geralmente utilizadas na logística, e são do tipo: paletes, contêineres e grandes caixas de transporte.

O sistema de empacotamento primário é formado por máquinas automáticas de dosagem vertical e embalagem do tipo almofada. As embalagens secundárias utilizam maquinário de enfardamento, agrupam trinta embalagens primárias. A embalagem terciária é realizada por um sistema robotizado de paletização, agrupando as embalagens secundárias em paletes.

Problema de controle de qualidade em um processo de acondicionamento de embalagens

Para fazer o controle de qualidade utilizaremos um método por amostragem, que neste caso é mais viável por se tratar de um processo dinâmico, onde não é viável fazer uma análise em cada unidade. Retiramos da esteira, periodicamente, uma amostra de cinco embalagens secundárias que será nosso conjunto de alternativas $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Essas alternativas serão avaliadas de acordo com os seguintes critérios: verificação de massa da embalagem secundária (c_1), verificação dimensional da embalagem secundária (c_2) e aparência da embalagem primária (c_3). Nós vamos considerar dois especialistas $\{e_1, e_2\}$ onde as avaliações do especialista (k) referentes a alternativa (i) e do critério (j) será o elemento $R_{ij}^k \in [0,1]$ da matriz R^k , para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ e $k \in \{1, 2\}$. As matrizes de decisão dos especialistas são mostradas nas Tabelas 1-2, conforme **Etapa 1**.

Tabela 1. Matriz de decisão do especialista e_1 .

R^1	c_1	c_2	c_3
a_1	0.7	0.9	1.0
a_2	0.9	0.8	0.9
a_3	0.9	1.0	1.0
a_4	0.8	0.9	0.8
a_5	0.7	0.8	0.8

Tabela 2. Matriz de decisão do especialista e_2 .

R^2	c_1	c_2	c_3
a_1	0.9	0.8	0.9
a_2	1.0	0.9	1.0
a_3	0.9	0.8	0.8
a_4	0.5	0.9	0.8
a_5	1.0	0.5	0.3

Escolha do vetor de referência $\mathcal{R}$ da **Etapa 2.**, $\mathcal{R} = (0.8, 0.8)$ e a quantidade mínima de alternativas a_i que devem satisfazer a condição final são 3 alternativas.

O vetor de pesos escolhido, **Etapa 3.**, é o vetor $w = (0.35, 0.35, 0.30)$.

De acordo com a **Etapa 4.** vamos gerar a matriz coletiva $R^* = (R_{ij}^*)_{5 \times 3}$, onde cada $R_{ij}^* \in [0, 1]^2$. Vale ressaltar que, nessa etapa fizemos uma normalização dos valores, onde o maior valor foi escalonado para 1.0 e os demais seguiram essa proporção.

Tabela 3. Matriz coletiva 2-dimensional.

R^*	c_1	c_2	c_3
a_1	(0.68, 0.88)	(0.88, 0.80)	(0.85, 0.77)
a_2	(0.88, 1.0)	(0.80, 0.88)	(0.77, 0.85)
a_3	(0.80, 0.80)	(1.0, 0.80)	(0.85, 0.68)
a_4	(0.80, 0.48)	(0.88, 0.88)	(0.68, 0.68)
a_5	(0.68, 1.0)	(0.80, 0.48)	(0.68, 0.25)

Para um melhor entendimento dos efeitos de mudanças feitas nas etapas do método, faremos duas análises: *Análise 1* e *Análise 2*, de acordo com a ordem e a agregação escolhidas na **Etapa 5**.

Análise 1: A ordem e a função de agregação escolhida, **Etapa 5.**, serão a ordem $\leq_n^p$ e a agregação do Exemplo 2.

Análise 2: A ordem e a função de agregação escolhida, **Etapa 5.**, serão a ordem $\leq_{Id}$ e a agregação do Exemplo 3.

Na **Etapa 6.** aplicaremos a agregação em cada linha da matriz coletiva da **Etapa 4.**, para calcular os $[0, 1]^n$ -escores s_i referentes a cada alternativa a_i . Seguem os cálculos:

$$\begin{aligned} s_1 &= \widetilde{A}((0.68, 0.88), (0.88, 0.80), (0.85, 0.77)) \\ &= (A(0.68, 0.88, 0.85), A(0.88, 0.80, 0.77)) \\ &= (0.80, 0.81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= \widetilde{A}((0.88, 1.0), (0.80, 0.88), (0.77, 0.85)) \\ &= (A(0.88, 0.80, 0.77), A(1.0, 0.88, 0.85)) \\ &= (0.81, 0.91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= \widetilde{A}((0.80, 0.80), (1.0, 0.80), (0.85, 0.68)) \\ &= (A(0.80, 1.0, 0.85), A(0.80, 0.80, 0.68)) \\ &= (0.88, 0.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= \widetilde{A}((0.80, 0.48), (0.88, 0.88), (0.68, 0.68)) \\ &= (A(0.80, 0.88, 0.68), A(0.48, 0.88, 0.68)) \\ &= (0.78, 0.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= \widetilde{A}((0.68, 1.0), (0.80, 0.48), (0.68, 0.25)) \\ &= (A(0.68, 0.80, 0.68), A(1.0, 0.48, 0.25)) \\ &= (0.72, 0.57) \end{aligned}$$

Na **Etapa 7.** Vamos verificar se cada s_i da **Etapa 6.** satisfazem a condição $\mathcal{R} \leq_n s_i$, onde $\mathcal{R} = (0.8, 0.8)$.

Análise 1. Utilizando a ordem $\leq_n^p$, dada por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \leq_n^p \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow \pi_i(\mathbf{x}) \leq \pi_i(\mathbf{y})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

Para $s_1 = (0.80, 0.81)$, temos $0.8 = 0.8$ e $0.80 < 0.81$, logo s_1 satisfaz $\mathcal{R} \leq_n^p s_1$;

Para $s_2 = (0.81, 0.91)$, temos $0.80 < 0.81$ e $0.80 < 0.91$, logo s_2 satisfaz $\mathcal{R} \leq_n^p s_2$;

para $s_3 = (0.88, 0.76)$, temos $0.80 < 0.88$ e $0.80 > 0.76$, logo s_3 não satisfaz $\mathcal{R} \leq_n^p s_3$;

para $s_4 = (0.78, 0.68)$, temos $0.80 > 0.78$ e $0.80 > 0.68$, logo s_4 não satisfaz $\mathcal{R} \leq_n^p s_4$;



para $s_5 = (0.72, 0.57)$, temos $0.80 > 0.72$ e $0.80 > 0.57$, logo s_5 não satisfaz $\mathcal{R} \leq_n^p s_5$.

Análise 2. Utilizando a ordem $\leq_{Id}$ dada por $\mathbf{x} \leq_{Id} \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}; x_k < y_k \text{ e } x_i = y_i,$

$\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$:

Para $s_1 = (0.80, 0.81)$, temos $0.8 = 0.8$ e $0.80 < 0.81$, logo s_1 satisfaz $\mathcal{R} \leq_{Id} s_1$;

Para $s_2 = (0.81, 0.91)$, temos $0.80 < 0.81$, logo s_2 satisfaz $\mathcal{R} \leq_{Id} s_2$;

para $s_3 = (0.88, 0.76)$, temos $0.80 < 0.88$, logo s_3 satisfaz $\mathcal{R} \leq_{Id} s_3$;

para $s_4 = (0.78, 0.68)$, temos $0.80 > 0.78$, logo s_4 não satisfaz $\mathcal{R} \leq_{Id} s_4$;

para $s_5 = (0.72, 0.57)$, temos $0.80 > 0.72$, logo s_5 não satisfaz $\mathcal{R} \leq_{Id} s_5$.

De acordo com as análises, para o período escolhido, temos que:

Na *Análise 1*, apenas os escores s_1 e s_2 satisfazem as condições determinadas pelo MCGDM na **Etapa 7**, ou seja $\mathcal{R} \leq_n^p s_1$ e $\mathcal{R} \leq_n^p s_2$, isso implica que apenas as alternativas a_1 e a_2 estão de acordo com as especificações estabelecidas no MCGDM, como na **Etapa 2**. foi imposto que o mínimo de alternativas, das 5 existentes, que devem satisfazer o critério da **Etapa 7**, é 3 a amostra retirada nesse período será recusada na *Análise 1*.

Na *Análise 2*, os escores s_1, s_2 e s_3 satisfazem as condições determinadas pelo MCGDM na **Etapa 7**, ou seja $\mathcal{R} \leq_{Id} s_1, \mathcal{R} \leq_{Id} s_2$ e $\mathcal{R} \leq_{Id} s_3$, isso implica que as alternativas a_1, a_2 e a_3 estão de acordo com as especificações estabelecidas no MCGDM, como na **Etapa 2**. foi imposto que o mínimo de alternativas, das 5 existentes, que devem satisfazer o critério da **Etapa 7**, é 3 a amostra retirada nesse período será aceita na *Análise 2*.

CONCLUSÃO

Este artigo usa teorias já consolidadas na literatura, como: funções de agregação, ordens parciais, ordens admissíveis, conjuntos fuzzy n-dimensionais (Milfont et. al., 2021a) (Milfont et. al., 2021b) para tratar dados em um método de tomada de decisão em grupos de multicritério (MCGDM). Este método foi

aplicado para controlar a qualidade de produtos em um processo de condicionamento.

Outra contribuição se refere ao método proposto, além de ser um método genérico, isto é, pode ser aplicado a outros casos, não apenas no processo de condicionamento. Ele também pode ser modificado, para atender a outras aplicações, por exemplo, as etapas podem ser adaptadas fazendo modificações nas funções de agregação, ordens e outros componentes, isso pode ser visto comparando a *Análise 1*. e a *Análise 2*.

O método apresentado, que é parte de um controlador fuzzy, foi eficiente na sua proposta de qualificar as alternativas, conforme mostrado nas *Análise 1*. e *Análise 2*. Esses resultados serão analisados periodicamente, conforme a proposta de controle e as *Análises* ainda precisam de um tratamento estatístico, que não é objetivo desse trabalho.

Para trabalhos futuros, é fundamental implementar esse método e elaborar todas as etapas de um controlador fuzzy, propor um método estatístico para as amostras, além disso outras agregações e outras ordens podem ser utilizadas, como já mencionado, para comparar os resultados.

REFERÊNCIAS

- B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, J. Fernández, R. Mesiar, D. Paternain, A characterization theorem for t-representable n-dimensional triangular norms, in: Proceeding of Eurofuse 2011, Vol. 107 of Advances in Intelligent and Soft Computing, 103-112, (2011).
- B. Bedregal, G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, R. Mesiar, D. Paternain, A class of fuzzy multisets with a fixed number of memberships, Inf. Sci., 189, 1-17, (2012).
- B. Pekala, Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory-Properties, Algorithms and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Vol. 367, 156p, (2019).
- C. L. Hwang, A. S. M. Masud. Multiple Objective Decisions Making, Methods and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, (1979).
- C. L. Hwang, K. Yoon. Multiple Attribute Decision Making, Methods and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, (1981).



- D. Bouyssou, T. Marchant, P. Perny, Social Choice Theory and Multicriteria Decision Aiding, in: D. Bouyssou et al. (eds), Decision-Making Process, Wiley, (2009).
- H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernandez, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagra, F. Herrera, B. De Baets, A Historical Account of Types of Fuzzy Sets and Their Relationships, in IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 24, (1), 179-194, (2016).
- J. M. Merigó, M. Casanova, Decision-making with distance measures and induced aggregation operators, Computer & Industrial Engineering 60, 66-76, (2011).
- K. B. Chhetri, Applications of Artificial Intelligence and Machine Learning in Food Quality Control and Safety Assessment. Food Eng Rev 16, 1-21 (2024).
- L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control, 8, 338-353, (1965).
- L. De Miguel, M. Sesma-Sara, M. Elkano, M. Asiain, H. Bustince, An algorithm for group decision making using n-dimensional fuzzy sets, admissible orders and OWA operators, Inf. Fusion, 37, 126-131, (2017).
- R. M. Rodríguez, B. Bedregal, H. Bustince, Y. Dong, B. Farhadinia, C. Kahraman, L. M. López, V. Torra, Y. J. Xu, Z. Xu, F. Herrera, A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making, Towards high quality progress. Inf. Fusion 29, 89-97, (2016).
- S. J. Chen, C. L. Hwang. Fuzzy Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, Springer, Berlin, Heidelberg, (1992).
- S. Puttero, E. Verna, G. Genta, M. Galetto, Improved quality control and sustainability in food production by machine learning, Procedia CIRP, Volume 122, 533-538, (2024).
- T. Milfont, B. Bedregal, I. Mezzomo, Generation of admissible orders on n-dimensional fuzzy set $L_n([0,1])$, Information Sciences 581, 856-875, (2021b).
- T. Milfont, I. Mezzomo, B. Bedregal, E. Mansilla, H. Bustince, Aggregation functions on n-dimensional ordered vectors equipped with an admissible order and an application in multi-criteria group decision-making, International Journal of Approximate Reasoning, 137, 34-50, (2021a).
- Y. Shang, X. Yuan, E. S. Lee, The n-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on the finite valued fuzzy sets, Computers & Mathematics with Applications, 60, 442-463, (2010).
- Z. Xu, X. Zhang, Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information, Knowledge-Based Systems 52, 53-64, (2013).
- Z. Xu, Hesitant Fuzzy Sets Theory, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Vol. 314, 448p, (2014).