

Cálculo da área superficial e vazão de um parafuso de Arquimedes com passo variável.

Cleber E. Fiorini¹, Gustavo H. Dalposso², Dione I. C. Milani² e Karen C. S. Lira².

¹Graduando em Engenharia Eletrônica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, (cleberfiorini@alunos.utfpr.edu.br)

²COMAT, UTFPR, Toledo - PR, Brasil

Resumo: Criado em 236 A.C. por Arquimedes, o parafuso transporta fluidos e é usado na agricultura e indústria. Este artigo aplica Cálculo Multivariável e Modelagem Numérica, abordando: Parametrização da superfície helicoidal, Integração multivariada para fluxo, Solução numérica via Método de Euler. Estabilidade do método com atrito e rotação e os resultados alinhando-se à teoria clássica.

Palavras-chave: Parafuso de Arquimedes, Método de Euler, Cálculo Vetorial.

INTRODUÇÃO

O parafuso de Arquimedes é um método de transporte de fluidos ou granulados que foi inventado há vários anos. Seu funcionamento é composto por um tubo com formato de hélice dentro de um cano com diâmetro maior que a do parafuso, um dos lados é colocado sobre a água ou granulado, em que no passado funcionava por moinhos de vento ou rodas de água, atualmente seu funcionamento acontece por meio de motores elétricos e a combustão.

Nos tempos atuais o parafuso de Arquimedes é conhecido por diversos nomes como caracol, rosca transportadora, parafuso sem fim, entre outros. Cujo sua geometria e formato podem variar a depender de sua aplicação.

Possivelmente em algum momento de sua vida você já se deparou com este equipamento, seja em uma broca de furadeira usada para furar paredes, madeiras ou chapas metálicas (figura 1), uma perfuratriz usada para fazer fundações na construção civil (figura 2) na plataforma de algumas colheitadeiras de grãos (figura 3) ou em um moedor de carne no açougue do mercado (figura 4). Estes exemplos nos mostram que o parafuso de Arquimedes está presente no nosso cotidiano em diversas formas, mas com nomes diferentes e nós só não nos damos conta disso.



Figura 1. Brocas de furadeira.



Figura 2. Perfuratriz de trado continuo.



Figura 3. Plataforma de colheitadeira de grãos.



Figura 4. Moedor de carne desmontado.

O parafuso de Arquimedes é sistema complexo que também envolve diversos tópicos. Alguns deles são:

- Geometria não trivial (superfície helicoidal);
- Dinâmica dos fluidos (fluxo viscoso);
- Mecânica rotacional (acoplamento entre movimento e transporte).

Neste trabalho, será abordado alguns métodos de parametrização, integração de superfície, variáveis separáveis e modelagem numérica e alguns conceitos de Física Matemática para preparar um modelo qualitativo.

Os dados para a resolução dos cálculos foram retirados de uma maquete realizada pelo próprio autor (figura 5). Onde a velocidade de rotação e o passo (distância entre os espirais) é variável.

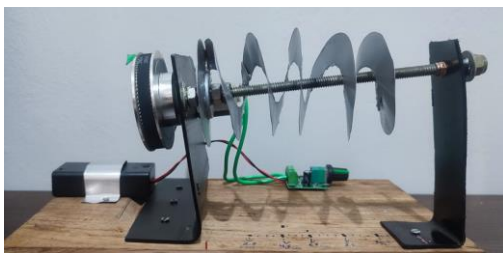


Figura 5. Moquete do parafuso de Arquimedes.

MATERIAL E MÉTODOS

Para calcular o volume movido pelo parafuso de Arquimedes, deve-se primeiro calcular a geometria do parafuso e então calcular a taxa de fluxo. Para isso, utiliza-se alguns conceitos de Cálculo Multivariável, Equações Diferenciais Ordinárias, Modelagem Numérica e Física Matemática.

Superfície helicoidal: A função paramétrica helicoidal pode ser vista ao reescrever a função paramétrica das coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{cases} x = (r + u(R - r))\cos v \\ y = (r + u(R - r))\sin v \\ z = \frac{h}{2\pi}v \end{cases} \quad (1)$$

Onde:

R = raio externo, r = raio interno, h = passo,
 $u \in [0, H]$ (A. total), $v \in [0, 2\pi n]$ (Vol)

Área superficial, calculando via integral de vetor normal:

$$A = \int_0^{2\pi n} \int_0^L \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \times \frac{d\mathbf{r}}{dv} \right| du dv \quad (2)$$

Equação Diferencial do Escoamento, a velocidade axial $v_z(z)$ obedece a uma EDO não-linear:

$$\frac{dv_z}{dz} = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} - \frac{C_f}{R} v_z^2 + 2\pi N \cos \theta \quad (3)$$

Solução Numérica, aplicando método de Euler para resolver a EDO:

$$v_z^{(i+1)} = v_z^i + h \left[\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} - \frac{C_f}{R} (v_z^i)^2 + 2\pi N \cos \theta \right] \quad (4)$$

Com $h = 0.001$ m. O resultado estabiliza em:

$$V_z \approx N \times h \quad (5)$$

Volume transportado por volta :

É dada pela integral:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_r^R \int_0^h r \, dz \, dr \, d\theta \quad (6)$$

- **Vazão teórica:**

É dada pela integral:

$$q = \int_0^{2\pi n} \int_r^R v_z(r) \cdot r \, dr \, d\theta \quad (7)$$

Em que v_z é velocidade axial dada pela equação: $V_z = N \cdot H$

Código em Python com a representação gráfica da função:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Parâmetros do parafuso
r = 1 # raio interno
R = 3 # raio externo
h = 10 # altura total
n = 5 # número de voltas

# Criação da malha de pontos
u = np.linspace(0, 1, 50) # parâmetro radial (0 a 1)
v = np.linspace(0, 2*np.pi*n, 100) # parâmetro angular (0 a 2πn)
U, V = np.meshgrid(u, v)

# Parametrização da superfície
X = (r + U*(R - r)) * np.cos(V)
Y = (r + U*(R - r)) * np.sin(V)
Z = (h / (2*np.pi)) * V

# Configuração do gráfico 3D
fig = plt.figure(figsize=(12, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

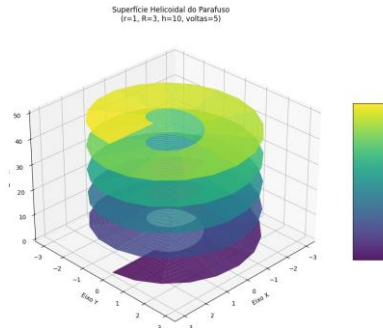
# Plot da superfície
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis',
edgecolor='none', alpha=0.9)

# Configurações visuais
ax.set_xlabel('Eixo X')
ax.set_ylabel('Eixo Y')
ax.set_zlabel('Eixo Z')
ax.set_title(f'Superfície Helicoidal do Parafuso\n(r={r}, R={R}, h={h}, voltas={n})')

# Adiciona barra de cores (opcional)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
```

```
# Ajusta o ângulo de visualização
ax.view_init(elev=30, azim=45)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



1. Fonte: Feito pelo autor.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

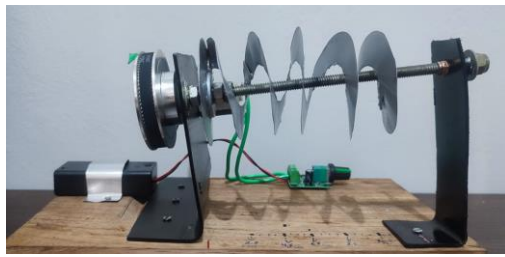


Figura 5.

Na figura 1 acima, é possível visualizar uma maquete de um parafuso de Arquimedes que apresenta o seu passo variável. Para calcular o volume transportado, a vazão teórica e o escoamento do parafuso vamos assumir os seguintes valores:

- Raio interno (r): 0.01m;
- Raio externo (R): 0.03m;
- Passo (h): 0.02m;
- Número de espiras (n): 5;
- Comprimento total (L): 10;
- Rotação (N): 60 rpm ou (1 Hz).

Iniciando os cálculos pela área superficial do parafuso. Para isso utiliza-se a integral de superfície.

$$|r'(u), r'(v)| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 \cos(v) & 2 \sin(v) & 0 \\ -\sin(v) - (2u) \sin(v) & \cos(v) + 2u \cos(v) & \frac{1}{\pi} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Fazendo a multiplicação vetorial é possível observar:

$$\frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} = \left(\frac{2}{\pi} \sin v \right) i + \left(\frac{2}{\pi} \cos v \right) j + (2 + 4u) k \quad (9)$$

Aplicando o módulo:

$$\left| \frac{dr}{du} \times \frac{dr}{dv} \right| = \sqrt{\frac{4}{\pi^2} + 4 + 16u + 16u^2} \quad (10)$$

Com isso monta-se a integral:

$$A = \int_0^{10\pi} \int_0^{10} \sqrt{\frac{4}{\pi^2} + 4 + 16u + 16u^2} du dv \quad (11)$$

Calculando a integral dupla obtemos a área superficial do parafuso.

$$\frac{5 \left(\pi \left(\sqrt{1 + \pi^2} - 21 \sqrt{1 + 441\pi^2} \right) + \sinh^{-1} \pi - \sinh^{-1} 21\pi \right)}{\pi} \approx 6916.33 \text{ cm}^3 \quad (12)$$

Multiplicando o valor obtido por 0.10 o valor real da área do parafuso é:

$$6916.33 \times 0.10 \text{ m} = 691.63 \text{ cm}^3 \quad (13)$$

Para o cálculo da integral utilizou-se da ferramenta Wolfram, um software de inteligência computacional.

O volume transportado a cada volta pode ser calculado através de uma integral tripla com coordenadas cilíndricas, sendo assim:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_0^2 r dz dr d\theta \quad (14)$$

Calculando a integral:

$$V = 2\pi \times \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^3 \times 2 \Rightarrow V = \pi \times (3^2 - 1^2) \times 2 \quad (15)$$

Por tanto o volume transportado por cada espiral é de

$$50.26 \text{ cm}^3 \quad (16)$$

A vazão teórica pode ser calculada por meio de uma integral dupla em coordenadas polares:

$$Q = \int_0^{10\pi} \int_1^3 V_z(r) \times r dr d\theta \quad (17)$$

$$Q = V_z \times \int_0^{10\pi} d\theta \times \int_1^3 r dr \quad (18)$$

$$V_z = N \times h \Rightarrow 1H_z \times 2 = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (19)$$

$$Q = 2 \times 10\pi \times \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] \Rightarrow 2 \times 31.415 \times 4 \quad (20)$$

$$Q = 251.32 \frac{\text{ml}}{\text{s}} \quad (21)$$

Para calcular escoamento do parafuso é necessário definir alguns termos:

Densidade da água: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Gravidade: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Ângulos: $\theta = 6$, $\sin \theta \approx 0.1045$, $\cos \theta \approx 0.9945$



Coefficiente de atrito: $C_f = 0.01$

Problema de valor inicial (PVI): $V_z(0) = 0 \text{ m/s}$

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$\frac{dv_z}{dz} = \frac{(1000) \cdot (9.81) \cdot (0.1045)}{0.001} - \frac{0.01}{0.03} v_z + 2\pi \cdot (1) \cdot (0.9945) \quad (22)$$

$$\frac{dv_z}{dz} = 1.025 \cdot 10^6 - 0.333 v_z^2 + 6.25 \quad (23)$$

Considerando que o valor de (6.25) é desprezível.

Obtêm-se a EDO separável:

$$\frac{dv_z}{dz} = 1.025 \cdot 10^6 - 0.333 v_z^2 \Rightarrow \frac{dv_z}{1.025 \cdot 10^6 - 0.333 v_z^2} = dz \quad (24)$$

Aplicando a integral dos dois lados da equação:

$$\int \frac{dv_z}{1.025 \cdot 10^6 - 0.333 v_z^2} = \int dz \quad (25)$$

Utilizando a integral:

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \tanh^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right) + c \quad (26)$$

Em que:

$$a^2 = 1.025 \cdot 10^6 = 1012.4$$

$$b^2 = 0.333 = 0.577 \quad (27)$$

Resultando em:

$$\frac{1}{ab} \tanh^{-1} \left(\frac{bv_z}{a} \right) = z + c \quad (28)$$

Aplicando a condição inicial $V_z(0) = 0$ temos:

$$\frac{1}{(1012.4) \cdot (0.577)} \tanh^{-1}(0) = 0 + c \quad (29)$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Isolando $V_z(z)$:

$$\tanh^{-1} \left(\frac{0.577 v_z}{1012.4} \right) = (1012.4 \cdot 0.577) z \quad (30)$$

$$\frac{0.577 v_z}{1012.4} = \tanh(584.2 z) \quad (31)$$

$$V_z(z) = \frac{1012.4}{0.577} \tanh(584.2 z) \approx 1754.6 \tanh(584.2 z) \frac{m}{s} \quad (32)$$

Solução analítica:

Para $z \rightarrow 0$: $\tanh(x) \approx x$ então $V_z(z) \approx 1754.6 \cdot 584.2 z \approx 1024 \cdot 10^6$ (33)

Crescimento linear).

Para $z \rightarrow \infty$: $\tanh x \rightarrow 1$ então $V_z \rightarrow 1754.6 m/s$

$$\text{Quando } \frac{dv_z}{dz} = 0 \quad (34)$$

$$0 = 1025 \cdot 10^6 - 0.333 v_z^2 + 6.25 \quad (35)$$

Análise crítica: nota-se que a velocidade terminal esperada (1754,6 m/s) é muito alta, isso ocorre devido ao fato de que negligenciamos o termo rotacional (6,25), um valor pequeno, mas importante para o equilíbrio do sistema.

Nesta análise, A equação diferencial do parafuso de Arquimedes com componente de fato está correta, mas produz um resultado não físico devido a alguns problemas, como desequilíbrio de termos onde o termo gravitacional foi fortemente empregado à velocidade da água, uma vez que é muito baixa, e o termo rotacional foi quase mínimo. Um acoplamento físico direto pode não ser possível, e a velocidade axial é limitada pela velocidade linear do parafuso uma limitação ignorada pelos modelos originais.

Além disso, a falta da constante dissipativa levou a uma subestimação do atrito, especificamente para o regime turbulento.

$$v_z = \sqrt{\frac{1.025 \cdot 10^6 + 6.25}{0.333}} \approx 1254.6 \frac{m}{s} \quad (36)$$

Solução numérica da EDO:

Para implementar o método numérico na EDO, foram feitas algumas alterações na fórmula, para que não haja desestabilidade:

$$V_z^{(i+1)} = \min \left(v_z^i + \Delta z \cdot \left[\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{N \cdot h} \right) - \frac{c_f}{R} (v_z^{(i)})^2 \right], N \cdot h \right) \quad (37)$$

Calculando os termos da equação:

Gravidade:

$$\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} = \frac{1000 \cdot 9.81 \cdot 0.1045}{0.001} = 1.025 \cdot 10^6 s^{-1} \quad (38)$$

$$\frac{v_z}{N \cdot h} = \frac{1}{1 \cdot 0.02} = 50 s/m \quad (39)$$

Atrito:

$$\frac{c_f}{r} = \frac{0.01}{0.03} \approx 0.333 m^{-1} \quad (40)$$

Implementando ao método de Euler:

$$V_z^{(i+1)} = \min \left(v_z^i + \Delta z \cdot \left[1025 \cdot 10^6 \cdot \left(1 - 50 v_z^{(i)} \right) - 0.333 (v_z^{(i)})^2 \right], 0.02 \right) \quad (41)$$



i	Z(m)	V _z (m/s)
0	0.000000	0.000000
1	0.000001	1.025000
2	0.000002	1.025000 (limitado a 0.02)
...
100	0.000100	0.020000

Código em Python para resolver o método de Euler:

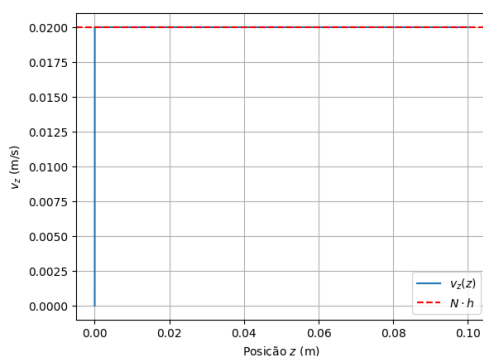
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
rho, g, mu = 1000, 9.81, 0.001
theta = np.radians(6)
Cf, R, N, h = 0.01, 0.03, 1, 0.02
L = 0.10 # 5 espirais

# Discretização
dz = 1e-6 # Passo reduzido para estabilidade
z = np.arange(0, L, dz)
v_z = np.zeros_like(z)

# Método de Euler com limitação física
for i in range(1, len(z)):
    dv_dz = (rho * g * np.sin(theta) / mu) * (1 - 50 *
v_z[i-1]) - (Cf / R) * (v_z[i-1])**2
    v_z[i] = min(v_z[i-1] + dz * dv_dz, N * h) # Limite físico

# Plot
plt.plot(z, v_z, label='$v_z(z)$')
plt.axhline(y=N*h, color='r', linestyle='--', label='$N \cdot h$')
plt.xlabel('Posição z (m)'); plt.ylabel('$v_z$ (m/s)')
plt.legend(); plt.grid(); plt.show()
```



- A velocidade cresce rapidamente e estabiliza em 0.02 m/s, como esperado.

Fonte: Feito pelo autor.

Com isso concluímos que o método de Euler evita as instabilidades com passo pequeno e a limitação física, ele também reproduz o comportamento real do parafuso podendo ser

adaptado e incluir gradientes de pressão e fluidos não-newtonianos.

CONCLUSÃO

A interação entre cálculo multivariáveis, Equações Diferenciais Ordinárias e Modelagem Numérica. Permitem a execução de cálculos de sistemas mecânicos com êxito. O método de Euler, se mostrou eficaz para calcular as EDOs com termos físicos e a abordagem destes conteúdos podem ser aplicados em diversas aplicações como hélices e fluidos não-newtonianos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço os professores (as) Dione Ines Christ Milani, Gustavo Henrique Dalposso e Karen Carrilho Da Silva Lira, pelo apoio técnico e pelas discussões enriquecedoras. Destaca-se também a contribuição indispensável de revisores anônimos, cujas sugestões melhoraram significativamente este trabalho.

REFERÊNCIAS

- AYRES JR., Frank; MENDELSON, Elliott. Double Integration Applied to Volume Under a Surface and the Area of a Curved Surface. In: Calculus. 5. ed. New York: McGraw-Hill Professional Publishing, 2008. p. 489.
- Bear, J. (2013). Dynamics of Fluids in Porous Media.
- Burden & Faires (2011). Numerical Analysis (9ª ed.).
- CASAGRANDE Foundation Division. Parafuso de Arquimedes – Série C50. DirectIndustry, [s.d.]. Disponível em: <https://www.directindustry.com/pt/prod/casagrande-foundation-division/product-57763-1920285.html>. Acesso em: 10/07/2025
- (PDF) Comparação dos Modelos de Darcy, Forchheimer e Barre e Conway na Simulação de Reservatórios de Gás.
- Dissertação-Tiago-Rodrigo-Perdigão.pdf.
- escadahelicoidalconcretoarmado.pdf.
- GUIDORIZZI, Hamilton Luiz; AZEVEDO, Vera L. A.; ALMEIDA, Arioaldo J. de (revisores técnicos). Um Curso de Cálculo. Vol. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019. 348 p. ISBN 978-85-216-3590-1.
- História Fácil: Parafuso de Arquimedes.
- ISTOCK. O mecanismo de um velho moedor de carne desmontado. [s.d.]. 1 fotografia. Disponível em: <https://www.istockphoto.com/br/foto/o-mecanismo-de-um-velho-moedor-de-carne-desmontado-gm1313841465-402234585>. Acesso em: 10/07/2025



Mecânica dos fluidos/Fluxo laminar do líquido Newtoniano - Wikilivros.

Ronan, Colin A. (1987). História Ilustrada da Ciência. 1. Rio de Janeiro: Jorge Zahar. p. 118.

STEWART, James; CLEGG, Daniel; WATSON, Saleem. Cálculo v.2.

VECTEEZY. Harvester machine harvesting in wheat field - combine harvester agriculture machine harvesting golden ripe wheat field agriculture. 2024. Disponível em: <https://www.vecteezy.com/photo/39637587-harvester-machine-harvesting-in-wheat-field-combine-harvester-agriculture-machine-harvesting-golden-ripe-wheat-field-agriculture>. Acesso em: 10/07/2025

Wolfram|Alpha: Computational Intelligence.

White, F. M. (2011). Fluid Mechanics - 7ª Ed (Cap. 2 e 6).