



SIMPÓSIO DE INTEGRAÇÃO, INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

TEORIA DAS PROBABILIDADES Esperança, Teoremas Limites e Aplicações

Luciana de Sousa Fialho¹
Edgar Luis Bezerra de Almeida²

RESUMO: A teoria das probabilidades oferece ferramentas fundamentais para a análise de fenômenos incertos e não determinísticos, sendo amplamente aplicada em áreas como estatística, inteligência artificial, engenharia e ciências naturais. Entre os conceitos centrais desta teoria destaca-se a esperança matemática, que permite quantificar médias ponderadas de variáveis aleatórias e analisar distribuições de probabilidade. Com base em revisão bibliográfica, especialmente na obra de Parzen (1960), este estudo explora propriedades e aplicações da esperança, como a esperança da soma de variáveis, momentos centrais, variância, covariância, correlação, esperança condicional e funções geradoras de momentos. Além disso, investiga-se a distinção conceitual entre expressões como $E[g(X)]$ e $E_x[g(x)]$, importantes para o entendimento dos momentos e da interpretação de distribuições. Com a fundamentação teórica consolidada, o estudo avança para a análise dos principais teoremas limites da teoria das probabilidades, incluindo a Desigualdade de Chebyshev, a Lei Fraca e a Lei Forte dos Grandes Números e o Teorema Central do Limite. A abordagem adotada promove a compreensão aprofundada das bases conceituais e matemáticas necessárias para lidar com incertezas, além de fortalecer habilidades dedutivas e formais essenciais na formação científica. O estudo evidencia a importância da esperança matemática tanto na fundamentação teórica quanto nas aplicações práticas que envolvem variáveis aleatórias e inferências estatísticas.

Palavras-chave: Teoria das Probabilidades, Esperança Matemática, Momentos Estatísticos, Teoremas Limites, Variáveis Aleatórias.

ABSTRACT: Probability theory provides essential tools for analyzing uncertain and non-deterministic phenomena, with broad applications in statistics, artificial intelligence, engineering, and the natural sciences. Among its core concepts, mathematical expectation stands out as it enables the quantification of weighted averages of random variables and the analysis of probability distributions. Based on a bibliographic review, especially the work of Parzen (1960), this study explores properties and applications of expectation, including the expectation of sums of random variables, central moments, variance, covariance, correlation, conditional expectation, and moment-generating functions. The conceptual distinction between

¹ Bacharelado em Engenharia Civil (em andamento). Campus Samambaia. E-mail: luciana.fialho@estudante.ifb.edu.br

² Professor (Matemática). Campus Brasília. E-mail: edgar.almeida@ifb.edu.br

expressions such as $E[g(X)]$ and $E_x[g(x)]$ is also examined, which is important for understanding moments and interpreting transformations of distributions. With the theoretical foundation established, the study advances to the analysis of major limit theorems in probability theory, including Chebyshev's Inequality, the Weak and Strong Laws of Large Numbers, and the Central Limit Theorem. This approach enhances the understanding of the conceptual and mathematical bases necessary for analyzing randomness, while also strengthening deductive and formal reasoning skills essential in scientific training. The study highlights the importance of mathematical expectation both in theoretical development and in practical applications involving random variables and statistical inference.

Keywords: Probability Theory, Mathematical Expectation, Statistical Moments, Limit Theorems, Random Variables.

INTRODUÇÃO

O tema central deste trabalho é a Teoria das Probabilidades. Na investigação desse resultado, um caminho natural a ser seguido foi o da análise das propriedades da esperança matemática e os conceitos probabilísticos envolvidos em aplicações específicas de análises estatísticas. Dessa forma, é possível compreender e aplicar os principais teoremas limites da teoria das probabilidades.

O objetivo geral do trabalho consistiu em investigar e analisar os enunciados, demonstrações e aplicações das propriedades da esperança matemática, bem como os conceitos correlatos. Para alcançar esse objetivo, foi realizada uma revisão bibliográfica básica em teoria das probabilidades, abordando os principais modelos de distribuição de probabilidades discretas e contínuas. Buscou-se, ainda, elucidar os conceitos subjacentes, enunciados e demonstrações das principais propriedades da esperança matemática, como a esperança da soma de variáveis aleatórias, os momentos do número de eventos ocorridos, a covariância, a variância de somas e correlações, a esperança condicional e a predição, além das funções geradoras de momentos e a definição geral de esperança.

Com esse embasamento, avançou-se para avançar a compreensão e a demonstração de teoremas limites fundamentais, tais como a Desigualdade de Chebyshev, a Lei Fraca dos Grandes Números, o Teorema Central do Limite e a Lei Forte dos Grandes Números.

A teoria das probabilidades é uma disciplina matemática que investiga e desenvolve estruturas adequadas para a quantificação e qualificação das incertezas e aleatoriedades presentes em fenômenos de natureza não determinística. Como esses fenômenos estão amplamente disseminados na prática das mais diversas ciências e engenharias, o estudo da teoria das probabilidades possui tanto um inegável apelo prático quanto um relevante interesse teórico. Além disso, é essencial para a formação de cientistas e engenheiros.

A presença da aleatoriedade é ubíqua em eventos cotidianos, fenômenos naturais e processos de engenharia. Três fatos sustentam essa afirmação:

1. Alguns fenômenos são inerentemente não determinísticos - por exemplo, em jogos de cartas, assume-se que as cartas são embaralhadas em uma ordem verdadeiramente aleatória;
2. Dados obtidos por observação podem ser incompletos - por exemplo, em uma pesquisa de opinião pública, nem todos os entrevistados respondem a todas as perguntas, o que introduz incerteza na análise dos resultados;
3. Modelagem incompleta - ao utilizar um modelo simplificado que exclui variáveis relevantes, introduz-se incerteza nas previsões deste modelo.

Uma vez que a aleatoriedade está presente em inúmeros fenômenos, é frequentemente necessário prever, quantificar, qualificar e analisar essas incertezas. Para o êxito nessas tarefas, os conceitos e técnicas da teoria das probabilidades mostraram-se indispensáveis.

A metodologia adotada neste projeto baseou-se em uma revisão bibliográfica ampla e no estudo detalhado de trabalhos específicos sobre o tema. Além disso, por se tratar do tema central de um projeto de iniciação científica, foram realizadas reuniões regulares com o orientador para discutir e refinar as abordagens teóricas adotadas.

REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico adotado baseou-se principalmente na obra de Parzen (1960) *Modern Probability Theory and Its Applications*. Foram estudados conceitos fundamentais da teoria das probabilidades, como média e variância de uma lei de probabilidade, esperança de uma função em relação a uma lei de probabilidade e funções geradoras de momentos. Também foram exploradas a desigualdade de Chebyshev e a lei dos grandes números, aplicadas a ensaios de Bernoulli repetidos e independentes. No estudo das variáveis aleatórias, abordaram-se suas definições, propriedades, distribuições condicionais e independência, bem como a lei de probabilidade de funções dessas variáveis. Além disso, foram investigados aspectos da esperança de variáveis aleatórias, tanto no caso de distribuições conjuntas quanto no de variáveis correlacionadas e independentes.

RESULTADOS

Com um escopo amplo, a iniciação científica foi desenvolvida com base no conteúdo estudado e na afinidade construída com o tema ao longo do projeto. A abordagem mostrou-se relevante por estimular o raciocínio lógico e dedutivo, competências fundamentais na formação científica. Para isso, foi necessário, inicialmente, compreender e diferenciar as definições fundamentais de expectativa (ou esperança) em teoria das probabilidades.

Foi importante, por exemplo, distinguir a expectativa de uma função contínua g com relação a uma função de probabilidade p da expectativa de uma variável aleatória X com relação à sua própria distribuição de probabilidade. Embora ambas se relacionassem com o conceito de média ponderada, tratavam-se de definições conceitualmente distintas que, em certos casos, coincidiam numericamente, mas partiam de fundamentações diferentes. Essas definições foram devidamente analisadas e demonstradas ao longo do estudo.

O primeiro conceito trabalhado com maior profundidade foi a esperança matemática de uma variável aleatória X , denotada por $E[X]$, que representa a média teórica dos valores de X que pode assumir, ponderados por suas respectivas probabilidades. A partir disso, definimos e analisamos os conceitos de momentos de uma lei de probabilidade, momentos centrais de ordem n , variância e funções geradoras de momentos.

Essas ferramentas permitiram, por exemplo, analisar distribuições do tipo normal, caracterizadas por uma média μ (ou expectativa) e um desvio padrão σ . Um problema clássico ilustrado foi: “Dada uma variável aleatória X com distribuição normal de média μ e desvio padrão σ , qual a probabilidade de X pertencer ao intervalo $[\mu - h\sigma, \mu + h\sigma]$?” A resposta é possível com o conhecimento de μ e σ , aplicando as propriedades da distribuição normal e a desigualdade de Chebyshev.

Outro aspecto fundamental abordado na obra de Parzen (1960) refere-se à relação entre a esperança de uma função de variável aleatória, $E[g(X)]$, e o cálculo da esperança usando a lei de probabilidade associada a X , representada por $E_x[g(x)]$. O autor destacou que, embora ambas as expressões sejam numericamente iguais, possuíam significados conceituais distintos. A notação $E[g(X)]$ foi considerada mais prática para manipulações técnicas e generalizações, mas a forma $E_x[g(x)]$ tornou explícito que o valor esperado estava sendo calculado com respeito à distribuição de probabilidade da variável aleatória X . Parzen enfatizou que essa distinção foi crucial, sobretudo quando se definem os momentos de uma variável aleatória. Por exemplo, o n -ésimo momento de uma variável aleatória X pode ser descrito como $E[X^n]$, mas, conceitualmente, seria mais apropriado representá-lo como $E_x[x^n]$, evidenciando que se trata da esperança da função $g(x)=x^n$ com relação à distribuição de X . Essa clareza conceitual contribui

para uma compreensão mais profunda do significado dos momentos, principalmente quando se trabalhou com funções mais complexas ou transformações da variável aleatória original.

Por fim, também foram demonstrados resultados importantes envolvendo a esperança de variáveis aleatórias distribuídas conjuntamente, bem como a diferenciação entre variáveis não correlacionadas e variáveis independentes — conceitos essenciais na modelagem de fenômenos com múltiplas fontes de aleatoriedade. Para a formalização rigorosa dessas definições, foi empregada a integração de Stieltjes, que se mostrou uma ferramenta eficaz para generalizar o cálculo de esperanças em contextos contínuos e não absolutamente contínuos. Por exemplo, a integral de Stieltjes permite definir a esperança de uma variável aleatória em relação a uma função de distribuição que apresenta saltos (como ocorre em distribuições mistas), algo que não é tratado adequadamente pela integral de Riemann. Esses avanços contribuíram para uma compreensão mais aprofundada e estruturada das aplicações da teoria das probabilidades.

REFERÊNCIAS

PARZEN, Emanuel. *Modern probability theory and its applications*. New York: Wiley, 1960.