



OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL DE TRELIÇA COM RESTRIÇÃO DE FREQUÊNCIA UTILIZANDO A FUNÇÃO FMINCON DO SCILAB

Luiz Antonio Farani de Souza¹

¹Docente, Doutor, Curso de Engenharia Civil, Campus Apucarana-PR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. lasouza@utfpr.edu.br

RESUMO

A crescente demanda por projetos estruturais inovadores, caracterizados pela leveza, eficiência e desempenho dinâmico adequado, exige o desenvolvimento de ferramentas computacionais robustas para otimização. Nesse contexto, este artigo apresenta uma pesquisa de natureza aplicada, com abordagem quantitativa e objetivo explicativo, conduzida por meio de simulações numéricas e validação frente à literatura. O objetivo principal é desenvolver e aplicar um modelo numérico-computacional para a otimização estrutural dimensional de treliças planas, utilizando a função *fmincon* do *software* livre Scilab, considerando a minimização da massa total da estrutura sujeita a restrições nas frequências naturais e à presença de massas não estruturais em nós específicos. O procedimento metodológico adotado compreendeu: a formulação do problema de otimização, definindo variáveis de projeto e restrições; a modelagem estrutural via Método dos Elementos Finitos, com obtenção das matrizes de rigidez e de massa consistente; a implementação computacional integrando a função *fmincon*, baseada no algoritmo de Ponto Interior (IPOPT) e no método L-BFGS, com a função *spec* do Scilab para cálculo de autovalores e autovetores; a aplicação do modelo em dois problemas de treliças presentes na literatura, a fim de validar a metodologia; e a análise dos resultados, comparando as soluções obtidas com referenciais já estabelecidos. Os resultados mostraram que o modelo é capaz de gerar soluções competitivas em termos de massa e desempenho dinâmico, validando sua eficácia. Assim, a proposta contribui para ampliar o uso de ferramentas livres em problemas de otimização estrutural complexos.

PALAVRAS-CHAVE: Fmincon; Frequência natural; Otimização estrutural; Treliça.

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia estrutural contemporânea, impulsionada por tecnologias de ponta e ferramentas computacionais avançadas, o projeto de estruturas tornou-se mais ousado. Essas estruturas, caracterizadas por sua leveza e flexibilidade em comparação com as construções anteriores, exigem uma análise detalhada de seu comportamento sob cargas dinâmicas, como as variações temporais de ações. Vibrações estruturais podem ser induzidas por fatores ambientais comuns, a exemplo de vento, tráfego de veículos e circulação de pedestres. Conseqüentemente, em modelos estruturais complexos, que buscam maior precisão e são cada vez mais utilizados, o estudo da dinâmica das estruturas é um aspecto crucial e não pode ser negligenciado (Castro Lemonge; Hallak; Carvalho, 2018). Otimização é definida como o uso eficiente de recursos limitados para alcançar um objetivo final. Matematicamente, isso implica maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a um número de restrições (Bodalal, 2025).

A otimização do projeto estrutural é uma atividade crítica e desafiadora, cujo objetivo é projetar uma estrutura com peso mínimo ou minimizar o valor de uma função objetivo correspondente ao custo mínimo da estrutura, enquanto um sistema de restrições pré-definidas é satisfeito. Um dos principais parâmetros que afetam o comportamento dinâmico de estruturas são suas frequências naturais. Em particular, algumas limitações devem ser impostas nas faixas de frequência natural para melhorar o desempenho da estrutura e evitar o fenômeno da ressonância (Kaveh; Ghazaan, 2015). Nesse sentido, o processo de análise e projeto estrutural deve ser conduzido de maneira iterativa, visando atender a essas



restrições. Nesse cenário, a busca por alternativas estruturais eficazes tem estimulado estudos voltados ao dimensionamento ótimo com restrições de frequência, além do desenvolvimento de métodos para controle de ruído e vibração em baixas frequências — temas que vêm recebendo atenção significativa na área científica (Khatibinia; Naseralavi, 2014). As estruturas de treliça são comuns em projetos de infraestrutura civil, como na construção de telhados e pontes. O custo dessas construções varia conforme sua relevância e dimensão, sendo o preço final determinado pelos gastos com materiais e pela execução da obra. Dessa forma, a aplicação de métodos de otimização para reduzir os custos do projeto estrutural se torna ainda mais vantajosa quando a importância ou o porte da treliça são maiores (Contreras-Bejarano; Villalba-Morales, 2024).

Normalmente, ao otimizar uma estrutura de treliça considerando restrições de frequência, as dimensões das seções transversais das barras e/ou as posições dos nós (coordenadas nodais) são ajustadas como variáveis de projeto, representando o dimensionamento e o *layout* da estrutura, respectivamente. Nesse tipo de problema, as primeiras frequências naturais da estrutura devem se manter dentro de limites pré-definidos, tanto superiores quanto inferiores. A otimização de treliças sob essas condições de frequência é um desafio complexo devido à natureza altamente não linear do problema e ao grande número de variáveis envolvidas. No entanto, dada a sua relevância crucial na prática do projeto estrutural, muitos pesquisadores e engenheiros têm dedicado esforços significativos para desenvolver métodos eficazes para solucionar essa questão (Sheng-Xue, 2023).

Do exposto, este artigo tem por objetivo desenvolver e aplicar um modelo numérico-computacional para a otimização estrutural dimensional de treliças planas, utilizando a função *fmincon* do *software* livre Scilab, versão 2025.1.0 (Scilab, 2025), considerando como variáveis de projeto as áreas das seções transversais das barras e impondo restrições às frequências naturais da estrutura, incluindo a influência de massas não estruturais nos nós. O procedimento metodológico adotado é descrito de forma sistemática, envolvendo a formulação matemática do problema de otimização, a discretização da estrutura pelo Método dos Elementos Finitos - MEF, a implementação computacional em Scilab com o uso da função *fmincon* e a validação do modelo por meio da comparação com exemplos consagrados da literatura. A função *fmincon* é um solucionador de otimização com restrições lineares e não lineares de igualdade e desigualdade. Ela utiliza o algoritmo de Ponto Interior (IPOPT – *Interior Point OPTimizer*) como solucionador principal. Por padrão, uma aproximação da Hessiana do Lagrangiano é determinada com a fórmula L-BFGS (Souza, 2024b).

Para ilustrar a eficácia do código numérico-computacional desenvolvido em ambiente Scilab, dois problemas são estudados, quais sejam: o primeiro problema tem o objetivo de validar o código computacional para a análise modal de treliça plana com a adição de massa não estrutural (Miguel; Miguel, 2012); e o segundo, consiste de um problema de otimização dimensional amplamente estudado na literatura (Wang; Zhang; Jiang, 2004; Sedaghati, 2005; Kaveh; Javadi, 2014; Khatibinia; Naseralavi, 2014), em que é empregada a função *fmincon* para encontrar as áreas ótimas das barras. As estruturas são discretizadas por meio do MEF e a matriz de massa global da estrutura é obtida a partir da matriz elementar de Massa Consistente. As frequências naturais e os respectivos modos de vibração são determinados pela função *spec* do Scilab (Souza, 2023; Souza, 2024a). Essa função calcula os autovalores de uma matriz quadrada, real ou complexa. Quando usada com dois argumentos de saída, ela também retorna os autovetores associados. É amplamente utilizada em análises de estabilidade e vibrações, sendo baseada em algoritmos numéricos eficientes da biblioteca LAPACK.



Este estudo se justifica pela necessidade de desenvolver e aplicar metodologias computacionais eficientes para a otimização de estruturas de treliça, considerando simultaneamente a minimização da massa e as restrições impostas pelas frequências naturais, além da influência de massas não estruturais. A utilização do *software* livre Scilab e da função *fmincon* representa uma contribuição relevante para a comunidade de engenharia estrutural, oferecendo uma alternativa acessível e poderosa para a solução de problemas complexos de otimização dinâmica. Quanto à classificação da pesquisa, trata-se de um estudo de natureza aplicada, com abordagem quantitativa, que possui objetivo explicativo e de validação computacional, sendo conduzido por meio de procedimentos numéricos baseados em simulações computacionais e comparação com resultados da literatura.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia adotada é descrita nesta seção, a qual engloba a formulação do problema de otimização dimensional de treliças, a formulação da matriz de Massa Consistente, o procedimento de inserção de massa não estrutural no sistema estrutural, a formulação da matriz de rigidez do elemento finito de treliça 2D e a implementação computacional com o programa Scilab desenvolvido para otimizar estruturas.

2.1 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Em um problema de otimização de treliça com restrições de frequência, o objetivo é minimizar a massa total da estrutura, enquanto se satisfazem múltiplas restrições nas frequências naturais. As áreas das seções transversais dos membros são consideradas como variáveis contínuas de projeto. A informação de conectividade da estrutura é pré-definida e mantida inalterada durante o processo de otimização. O problema de otimização pode ser definido matematicamente da seguinte forma (Kaveh; Ghazaan, 2015; Khodadadi; Mirjalili, 2022):

$$\begin{aligned}
 & \text{Encontrar } A = [A_1, A_2, \dots, A_n] \\
 & \text{Para minimizar } f(A) = \rho \sum_{i=1}^{nb} A_i L_i \quad (1) \\
 & \text{Sujeita a } \omega_j \geq \omega_{lim_j}, \text{ com } j = 1, \dots, nr \\
 & \quad A_{mín} \leq A_i \leq A_{máx}, \text{ com } i = 1, \dots, nb
 \end{aligned}$$

sendo nb o número total de barras, nr o número de restrições, ρ a massa específica do material, A_i a área da seção transversal, L_i o comprimento da i -ésima barra da estrutura, ω_j a j -ésima frequência natural, $A_{mín}$ a área mínima (limite inferior), $A_{máx}$ a área máxima (limite superior) e ω_{lim_j} os valores mínimos impostos das frequências naturais.

2.2 MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

A matriz de massa elementar no MEF pode ser formulada de duas maneiras principais. Uma delas, refere-se à matriz de Massa Consistente que distribui a massa dos elementos proporcionalmente aos graus de liberdade dos nós conectados. A outra é a matriz de Massa Condensada (ou Concentrada), a qual aproxima a massa total do elemento como estando concentrada nos nós. Neste trabalho é utilizada a matriz elementar de Massa



Consistente m_{cons} , que é definida pela seguinte equação no sistema local de coordenadas por (Soriano, 2014):

$$m_{cons} = \frac{\rho AL}{6} [2 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 2] \quad (2)$$

A matriz global de massa M da treliça é obtida pela soma das matrizes de massa de cada elemento, transformadas para o sistema de referência global de coordenadas cartesianas. A transformação é realizada com base na matriz de transformação de coordenadas do elemento R . Se a matriz R leva o sistema de referência local para o global, as matrizes elementares de massa no sistema global (M_{cons}) são dadas por:

$$M_{cons} = R^T m_{cons} R \quad (3)$$

Para um elemento de barra com ângulo θ (ângulo entre o eixo da barra e o eixo x), a matriz R é definida por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ & & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.3 MASSA NÃO ESTRUTURAL

Para incorporar massas não estruturais na análise de treliças utilizando o MEF, é fundamental ajustar a matriz de massa do sistema para refletir essas adições. Massas não estruturais representam cargas adicionais que não fazem parte da massa própria da estrutura, como equipamentos, mobiliário ou outras cargas permanentes. A massa não estrutural m_{ne} é adicionada a um nó específico, ajustando os termos correspondentes na matriz de massa. Por exemplo, se a massa adicional for aplicada ao nó i e considerando um sistema bidimensional com graus de liberdade em x e y , os termos $M(2i - 1, 2i - 1)$ (associado ao deslocamento em x) e $M(2i, 2i)$ (associado ao deslocamento em y) seriam incrementados por m_{ne} , ou seja:

$$\begin{aligned} M(2i - 1, 2i - 1) &= M(2i - 1, 2i - 1) + m_{ne} \\ M(2i, 2i) &= M(2i, 2i) + m_{ne} \end{aligned} \quad (5)$$

Com a matriz de massa global M modificada, a análise dinâmica da treliça é prosseguida. A massa não estrutural exerce influência significativa sobre o comportamento dinâmico da estrutura, notadamente nas frequências naturais. Diferentemente da massa estrutural, que pode ser ajustada ou redistribuída durante o processo de otimização, a massa não estrutural é geralmente considerada fixa em termos de posição e magnitude. Entre os principais efeitos da presença de massa não estrutural, destacam-se a redução das frequências naturais e a modificação dos modos de vibração. A adição de massa em regiões associadas a grandes amplitudes modais tende a diminuir as frequências naturais, o que pode demandar um aumento na rigidez estrutural para que os limites dinâmicos sejam atendidos. Como consequência, certas barras podem exigir seções transversais maiores.

2.4 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA 2D



No contexto da análise de estruturas utilizando o MEF, a matriz de rigidez de um elemento de treliça 2D desempenha um papel fundamental na relação entre as forças nodais aplicadas e os deslocamentos resultantes. Essa matriz representa as propriedades de rigidez do elemento e como ele resiste à deformação sob a ação de cargas (Bathe, 2016). A matriz de rigidez elementar k_{el} é obtida no sistema local de coordenadas por:

$$k_{el} = \frac{EA}{L} B \tag{6}$$

na qual E é o módulo de elasticidade longitudinal e B é a matriz dada por:

$$B = [1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \tag{7}$$

A matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas K_{el} é calculada conforme a expressão:

$$K_{el} = R^T k_{el} R \tag{8}$$

na qual R é a matriz de transformação dada pela Equação (4).

2.5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL COM A FUNÇÃO FMINCON

Com o objetivo de solucionar problemas de otimização não linear com múltiplas variáveis e restrições, o pacote externo *fmincon*, acessível no Gerenciador de Módulos ATOMS do Scilab, utiliza o Método do Ponto Interior (IPOPT). Desenvolvido por Michael Baudin e Stéphane Motteet, essa função emprega, por padrão, a técnica L-BFGS para aproximar a Hessiana do Lagrangiano, construindo uma sequência de iterações a partir de um ponto inicial definido. De acordo com os autores, o algoritmo IPOPT demonstra boa convergência global, mesmo em condições menos favoráveis, devido às suas elevadas taxas de convergência. Essencialmente, trata-se de um método de otimização global fundamentado na abordagem primal-dual do ponto interior (Souza, 2024b). A função *fmincon* do Scilab é integrada à análise estrutural da treliça, sendo combinada com o MEF. Para resolver os problemas de otimização estrutural, é criado um *script* que consiste de um texto com uma sequência de comandos que será posteriormente executado. A função *spec* do Scilab é usada para determinar os autovalores e os correspondentes autovetores de uma matriz quadrada. Essa função utiliza dois argumentos de saída de acordo com a sintaxe mostrada na Figura 1.

Na Figura 1, o argumento *autovet* é a matriz cujas colunas são os autovetores de S e *autoval* é a matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de S . O Scilab utiliza, por padrão, algoritmos baseados na decomposição Schur para encontrar os autovalores. Os cálculos são feitos por meio de rotinas otimizadas da biblioteca LAPACK, que é uma referência em álgebra linear numérica. O pseudocódigo empregado para a otimização dimensional do problema de treliça plana na Seção 3.2 é apresentado de maneira simplificada na Figura 2.

```
[autovet, autoval] = spec(S);
```

Figura 1: Sintaxe da função *spec* do Scilab.



Fonte: O Autor.

```

//Sub-rotina para a determinação da função objetivo
function f=objfun(A)
soma=0;
for i=1:10
    soma=soma+rho(i)*L(i)*A(i);
end
f=[soma];
endfunction
//Sub-rotina para a determinação das restrições de igualdade e desigualdade
function [c, ceq]=confun(A)
    Chama a sub-rotina para determinar a matriz de rigidez K(A)
    Chama a sub-rotina para determinar a matriz de massa global modificada M com a adição das massas não
    estruturais em nós especificados
    [autovet, autoval] = spec(M^-1*K); //Determina as matrizes com os autovalores e autovetores
    cont=0;
    for i=1:NTGL
        if autoval(i,i)~=1 && autoval(i,i)~=0
            cont=cont+1;
            frequencia(cont)=sqrt(autoval(i,i));
        end
    end
    frequencia=gsort(frequencia/(2*%pi)); //Determina as frequências naturais em Hertz em ordem decrescente
//Restrições não lineares de desigualdade
c = [wlim1-frequencia(8);
    wlim2-frequencia(7);
    wlim3-frequencia(6)];
//Restrições não lineares de igualdade
ceq = [ ]
endfunction
//Aproximação inicial
A0 = [10^-4*ones(10,1)];
//Área mínima admissível para as barras (limite inferior)
lb = [6.45*10^-5*ones(10,1)];
//Área máxima admissível para as barras (limite superior)
ub = [32.0*10^-4*ones(10,1)];
//Execução da função fmincon
opt = optimoptions ("fmincon", "Display","iter", "MaxFunctionEvaluations",200, "MaxIterations",3500,
"FunctionTolerance",1.e-8, "OptimalityTolerance",1.e-8);
[A,fval,exitflag,output,lambda,grad,hessian] = fmincon ( objfun ,A0,[],[],[],[],lb,ub,confun,opt);
//Pós-processamento (resultados mostrados no Console)
disp('Área das barras (cm²):',A*10^4)
disp('Massa total f(A):',fval)
disp(output)
  
```

Figura 2: Pseudocódigo para a otimização estrutural com a função *fmincon* do Scilab.

Fonte: O Autor.

As variáveis globais do pseudocódigo incluem as propriedades do material (módulo de elasticidade longitudinal E e massa ρ), os comprimentos indeformados das barras (L_i) da treliça, os parâmetros da malha de Elementos Finitos e os valores mínimos impostos das frequências naturais ($wlim1$, $wlim2$ e $wlim3$). São informados ao pseudocódigo os seguintes parâmetros de entrada para realizar o processamento: o vetor $A0$ referente à estimativa inicial para as áreas da seção transversal das barras; o vetor $Amin$ que define o limite inferior das áreas; e o vetor $Amax$ que especifica o limite superior das áreas. Duas funções (*function*) são criadas no pseudocódigo, a saber: a primeira refere-se à função $f = objfun(x)$, na qual é informada a função objetivo; e a segunda refere-se à função $[c, ceq] = confun(x)$, em que são informadas as restrições de desigualdade e igualdade. A solução é obtida executando-se a função *fmincon*, a qual retorna o vetor A , que é a solução ótima do problema de otimização, e *fval*, que é o valor da função objetivo em A . O parâmetro de entrada *opt*



corresponde à lista de parâmetros opcionais utilizados para configurar o comportamento do *solver*. O parâmetro de saída *output* fornece as informações detalhadas acerca do processo de otimização, incluindo o número de iterações realizadas e o número de avaliações da função durante a busca pela solução ótima.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A otimização estrutural dimensional de treliças planas com restrição de frequências naturais é uma estratégia fundamental para garantir desempenho dinâmico adequado ao mesmo tempo em que se minimiza a massa estrutural. Nesse processo, busca-se determinar as áreas transversais ótimas das barras da treliça, respeitando restrições impostas às frequências naturais - normalmente para evitar que a estrutura entre em ressonância com cargas dinâmicas conhecidas, como vibrações induzidas por vento, máquinas ou tráfego.

3.1 TRELIÇA CONSTITUÍDA POR 10 BARRAS COM MASSA NÃO ESTRUTURAL

Este problema tem por objetivo validar o modelo numérico-computacional para a análise modal de treliça plana com adição de massa não estrutural em nós especificados. A estrutura consiste de uma treliça plana em balanço composta por dez barras conectadas por seis nós, de acordo com a Figura 3. Nos nós “1” e “4” há apoios do tipo pino. Nos nós circutados nessa figura, são adicionadas massas concentradas, cujo valor é $m_{ne} = 453,6$ kg cada. O material das barras é o alumínio, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 68,95$ GPa e massa específica $\rho = 2767,99$ kg/m³. A área da seção transversal de cada barra varia, conforme ilustrado na Tabela 1. Na Tabela 2, aparecem os resultados obtidos com o programa desenvolvido aqui e os resultados fornecidos por Miguel e Miguel (2012), havendo boa concordância.

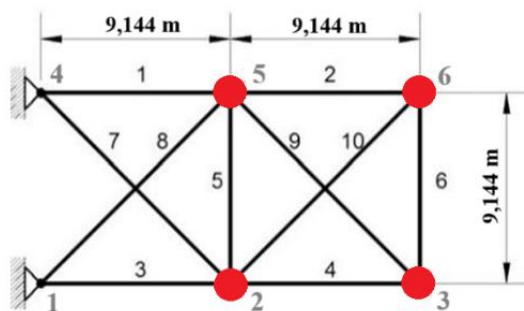


Figura 3: Modelo estrutural da treliça com dez barras e seis nós.
Fonte: O Autor.

A Figura 4 evidencia que há uma redução da frequência fundamental à medida que a massa não estrutural aumenta. Sem a massa não estrutural, a frequência da estrutura é 22,587543 Hz. Com a adição das massas não estruturais aos nós da estrutura, a frequência fundamental decai, atingindo o valor de 4,1158746 Hz para massas não estruturais $m_{ne} = 1400$ kg. Como a rigidez da treliça é definida pelos elementos estruturais (barras), e as rigidezes axiais das barras (EA) não foram alteradas, o aumento exclusivo da massa não estrutural leva à redução das frequências naturais. Após certa quantidade (cerca de 900 kg), o comportamento da curva se estabiliza, sugerindo que a estrutura entra em um regime no qual a adição de massa tem efeito marginal sobre a frequência, o que pode ser explorado em projetos para avaliar limites de desempenho dinâmico.



Tabela 1: Áreas da seção transversal das barras em cm².

Barra	Área
1	36,198
2	14,030
3	34,754
4	14,900
5	0,654
6	4,672
7	23,467
8	25,508
9	12,707
10	12,351

Fonte: Miguel e Miguel (2012).

Tabela 2: Comparação das frequências naturais em Hertz.

Frequência	Spec	Miguel e Miguel (2012)
1 (fundamental)	7,0003426	7,0002
2	16,164158	16,1640
3	20,003426	20,0029
4	20,022766	20,0221
5	28,543367	28,5428
6	28,922542	28,9220
7	48,354638	48,3538
8	50,801312	50,8004

Fonte: O Autor (2025).

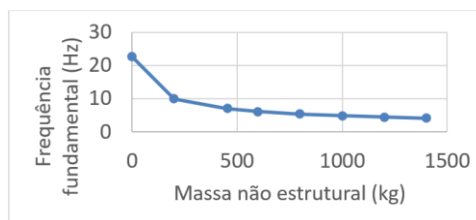


Figura 4: Curva massa não estrutural versus frequência.

Fonte: O Autor.

3.2 TRELIÇA CONSTITUÍDA POR 10 BARRAS COM MASSA NÃO ESTRUTURAL

Considere a treliça plana com dez barras, com formato fixo e dimensões das seções transversais variáveis, conforme o modelo estrutural da Figura 3. Em cada nó livre da mesma é acoplada uma massa não estrutural de 454,0 kg. O material das barras tem módulo de elasticidade $E = 6,98 \times 10^{10}$ Pa e densidade $\rho = 2770$ kg/m³. As restrições de frequência do projeto são $f_1 \varepsilon 7$ Hz, $f_2 \varepsilon 15$ Hz e $f_3 \varepsilon 20$ Hz, a área mínima (A_{min}) admissível para a seção transversal das barras é $6,45 \cdot 10^{-5}$ m² e a área máxima (A_{max}), $3,2 \cdot 10^{-3}$ m². Consideram-se as áreas das barras iguais a $1,0 \cdot 10^{-4}$ m² como aproximação inicial para a inicialização do procedimento de otimização. A comparação das áreas ótimas (em cm²) obtidas com a abordagem numérica proposta e com as obtidas nos trabalhos de Wang, Zhang e Jiang (2004), Sedaghati (2005), Kaveh e Javadi (2014) e Khatibinia e Naserlavi (2014) é mostrada na Tabela 3. As quatro primeiras frequências naturais obtidas dos estudos são apresentadas na Tabela 4. A massa total determinada com o modelo numérico



proposto é de 533,30527 kg, valor próximo ao dos estudos comparados da literatura. Mesmo com essas variações, a massa obtida no presente estudo mostra-se competitiva e validada, demonstrando que a abordagem proposta atinge soluções eficientes sem comprometer o desempenho dinâmico.

As diferenças nas áreas ótimas das barras observadas na Tabela 3 decorrem principalmente devido ao uso de diferentes algoritmos (como métodos heurísticos, metaheurísticos ou determinísticos), ao tratamento das restrições de frequência e aos critérios de convergência empregados nos estudos. A presença de barras com seções transversais mínimas (como a da barra 5, com aproximadamente 0,645 cm²) é um indício direto da eficiência da otimização, que elimina rigidez em que ela é desnecessária, redistribuindo-a para onde é mais crítica ao comportamento dinâmico. De acordo com a Tabela 4, verifica-se que, ao final do processo de otimização estrutural da treliça em tela, todas as restrições impostas ao problema - relacionadas às frequências naturais mínimas - são atendidas pela abordagem proposta. Os modos de vibração da treliça, correspondentes as três primeiras frequências naturais, estão ilustrados na Figura 5.

Tabela 3: Comparação das áreas ótimas (cm²) e da massa total (kg).

Barra	<i>Fmincon</i>	Wang, Zhang e Jiang (2004)	Sedaghati (2005)	Kaveh e Javadi (2014)	Khatibinia e Naseralavi (2014)
1	32,000100	32,456	38,245	35,540	35,5972
2	14,027844	16,577	9,916	15,293	14,9319
3	32,000100	32,456	38,619	35,784	35,6423
4	14,027844	16,577	18,232	14,605	14,9285
5	0,6449000	2,115	4,419	0,645	0,6450
6	4,6959305	4,467	4,194	4,625	4,6227
7	24,794649	22,810	20,097	24,778	24,0659
8	24,794649	22,810	24,097	23,310	24,0523
9	15,211873	17,490	13,890	12,482	12,5724
10	15,211873	17,490	11,4516	12,674	12,5909
Massa total	533,30527	553,80	537,01	532,11	531,91

Fonte: O Autor (2025).

Tabela 4: Comparação das quatro primeiras frequências naturais (Hz).

Frequência	<i>Fmincon</i>	Wang, Zhang e Jiang (2004)	Sedaghati (2005)	Kaveh e Javadi (2014)	Khatibinia e Naseralavi (2014)
1	7,0000000	7,011	6,992	6,999	7,000
2	15,864077	17,302	17,599	16,175	16,176
3	20,000000	20,001	19,973	19,999	20,000
4	20,145422	20,100	19,977	20,006	20,001

Fonte: O Autor (2025).

4 CONCLUSÃO

Apesar das pequenas diferenças com os resultados da literatura, os valores obtidos com a abordagem proposta foram satisfatórios e validados, com o diferencial da consideração explícita de massas não estruturais e do uso de ferramenta livre – o programa Scilab. A solução gerada pelo algoritmo *fmincon* demonstrou-se competitiva em relação aos estudos considerados da literatura, com uma massa final muito próxima às soluções conhecidas, validando a robustez da formulação. Nesse sentido, o modelo numérico-



computacional pode servir de base para o desenvolvimento de sistemas mais complexos de otimização em engenharia estrutural.

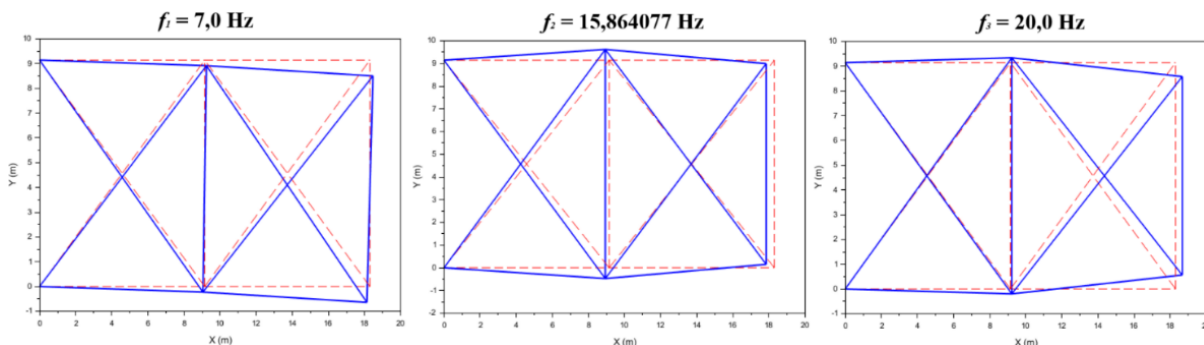


Figura 5: Modos de vibração da treliça com dez barras.

Fonte: O Autor.

A otimização possibilitou minimizar a massa total da treliça com dez barras, respeitando as restrições de frequências naturais impostas. Essa redução implica na diminuição de custos com materiais e execução da obra, na diminuição da carga permanente influenciando nas fundações e outras partes da estrutura e, ainda, na melhoria da sustentabilidade ao usar menos recursos. A determinação das frequências naturais e dos modos de vibração por meio da função *spec* do Scilab, fundamentada em algoritmos numéricos confiáveis da biblioteca LAPACK, assegurou a acurácia das análises dinâmicas realizadas durante o processo de otimização. A escolha do programa livre Scilab e de sua função de otimização *fmincon*, baseada no robusto algoritmo de Ponto Interior (IPOPT), ofereceu uma alternativa acessível e poderosa para lidar com esse tipo de problema. A capacidade dessa função de trabalhar com restrições lineares e não lineares, juntamente com a aproximação da Hessiana do Lagrangiano pelo método L-BFGS, torna-a uma ferramenta promissora para a otimização de treliças com restrições de frequência.

O modelo numérico proposto apresenta limitações. Ele considera apenas a otimização das áreas da seção transversal das barras, mantendo fixa a topologia e o *layout* da treliça. A solução ótima pode ser sensível à aproximação inicial da otimização, podendo convergir para mínimos locais. Estratégias híbridas (como metaheurísticas associadas a métodos locais) poderiam mitigar esse efeito. Outras restrições no modelo de otimização da treliça, como limites de tensão e deformações máximas admissíveis, poderiam ser incluídas. Isso tornaria o modelo mais realista e alinhado às práticas de projeto estrutural, que não visam apenas desempenho dinâmico, mas também segurança estrutural e funcionalidade. Por fim, a literatura científica demonstra que a otimização de treliças com restrições de frequência é um problema complexo e não linear, com um elevado número de variáveis de projeto. A ocorrência de troca de modos de vibração durante o processo de otimização pode dificultar a convergência dos algoritmos. Diante dessa complexidade, o desenvolvimento e a aplicação de ferramentas computacionais eficientes são de suma importância para auxiliar os engenheiros estruturais na obtenção de projetos otimizados e seguros.

5 AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da Universidade Estadual de Maringá pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.



REFERÊNCIAS

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2ª Ed. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.

BODALAL, R. A performance comparison of eight meta-heuristic algorithms for the optimal design of large-scale truss structures. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 47, n. 3, p. 1-37, 2025. Disponível em: https://idp.springer.com/authorize/casa?redirect_uri=https://link.springer.com/article/10.1007/s40430-025-05404-4&casa_token=SUxalHHQOylAAAAA:J-uqrHgHaYv4o7pj_WNDYiY1z2qRTmt3wSvES6IZWgv_IQa8MIVidcCsj70vgiupscRhMyW5LP9tMm_d9A. Acesso em: 13 mai. 2025.

CASTRO LEMONGE, A. C.; HALLAK, P. H.; CARVALHO, J. P. G. Otimização estrutural de treliças considerando restrições de frequências naturais de vibração. **Principia: Caminhos da Iniciação Científica**, v. 18, n. 2, p. 14-14, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufff.br/index.php/principia/article/view/29874>. Acesso em: 13 mai. 2025.

CONTRERAS-BEJARANO, O.; VILLALBA-MORALES, J. D. On the use of the differential evolution algorithm for truss-type structures optimization. **Applied Soft Computing**, v. 161, p. 111372, 2024. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494624001467>. Acesso em: 13 mai. 2025.

KAVEH, A.; GHAZAN, M. I. Hybridized optimization algorithms for design of trusses with multiple natural frequency constraints. **Advances in Engineering Software**, v. 79, p. 137-147, 2015. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997814001744>. Acesso em: 13 mai. 2025.

KAVEH, A.; JAVADI, S. M. Shape and size optimization of trusses with multiple frequency constraints using harmony search and ray optimizer for enhancing the particle swarm optimization algorithm. **Acta Mechanica**, v. 225, n. 6, p. 1595-1605, 2014. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00707-013-1006-z>. Acesso em: 5 mai. 2025.

KHODADADI, N.; MIRJALILI, S. Truss optimization with natural frequency constraints using generalized normal distribution optimization. **Applied Intelligence**, v. 52, n. 9, p. 10384-10397, 2022. Disponível em: https://idp.springer.com/authorize/casa?redirect_uri=https://link.springer.com/article/10.1007/s10489-021-03051-5&casa_token=iBvXBoG79EcAAAAA:ANXcNfVqJx-7FSJpfD67lfAjJy16Z_wVYWjlp07I3-17cFqOZpHmFUCSnHPHi0EojKs_Zq60SZdlEg8MJw. Acesso em: 13 mai. 2025.

KHATIBINIA, M.; NASERALAVI, S. S. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on orthogonal multi-gravitational search algorithm. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 24, p. 6349-6369, 2014. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X14006245?casa_token=KLZa pVRKo1kAAAAA:tPfoO-wuuUvX7OGAHgms5e6uIB19ym6pfsT-Nu-RNDq9ubIVJAg3LHfYiOfYntRoiVeXceKVzEko. Acesso em: 13 mai. 2025.



MIGUEL, L. F. F.; MIGUEL, L. F. F. Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 10, p. 9458-9467, 2012. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417412003764>. Acesso em: 02 jun. 2025.

SCILAB, versão 2025.1.0. Dassault Systèmes, 2025.

SEDAGHATI, R. Benchmark case studies in structural design optimization using the force method. **International journal of solids and structures**, v. 42, n. 21-22, p. 5848-5871, 2005. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768305001411>. Acesso em: 5 mai. 2025.

SHENG-XUE, H. Truss optimization with frequency constraints using the medalist learning algorithm. In: **Structures**. Elsevier, 2023. p. 1-15. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352012423007713>. Acesso em: 13 mai. 2025.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

SOUZA, L. A. F. Análise dinâmica não linear de estruturas reticuladas por meio do elemento finito corrotacional considerando o cisalhamento e diferentes matrizes de massa. **REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 19, n. 2, p. 1-20, 2023.

SOUZA, L. A. F. Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de shear building utilizando o programa Scilab. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 46, 2024a. Disponível em: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&profile=ehost&scope=site&authtype=crawler&jrnl=16772334&AN=183111725&h=gUhZTn%2FKMVIZN0ecShbpDclTwb%2FrCvEmOrVFT%2FqiGKi8%2B%2FLdH0PI9E81AL3BeiiiUPCegroBkSyiYnp4EHYeuA%3D%3D&crl=c>. Acesso em: 13 mai. 2025.

SOUZA, L. A. F. Uso do programa Scilab na resolução de problemas da resistência dos materiais com a função fmincon. **# Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, v. 13, n. 2, 2024b. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/tear/article/view/7414>. c

WANG, D.; ZHANG, W. H.; JIANG, J. S. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints. **AIAA journal**, v. 42, n. 3, p. 622-630, 2004. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.1711>. Acesso em: 13 mai. 2025.