III CONGRESSO AMAZÔNIDA MARAJOARA DE MATEMÁTICA
O Ensino de Matemática e Bem-estar Mental: uma relação possível
06 a 08 de agosto de 2025
Breves, Marajó, Pará - Brasil

APLICAÇÃO DE INTEGRAIS DE SUPERFÍCIES NA CONSTRUÇÃO DE UMA EMBARCAÇÃO

Jorsi José da Conceição Cunha Júnior[1]

Jorsi José da Conceição Cunha[2]

Eixo: Matemática Pura

Resumo
Este artigo aborda o cálculo de integrais de superfícies com aplicação no cálculo da superfície no casco de uma embarcação, meio de transporte muito utilizado na região amazônica, onde temos o propósito de calcular a área do casco e encontrar o custo do material utilizado na sua construção, observando os padrões de construção e seu tamanho. Para isso utilizamos uma aplicação de formalismo das integrais de superfície, aproximando com as medidas reais utilizadas pelos carpinteiros. A temática deste trabalho de cunho científico trata-se, sobre a combinação harmoniosa de saberes populares e conhecimentos matemáticos na construção de embarcações destacando a interdisciplinaridade.

Palavras-chave: Superfície; Embarcação; Aplicações.

.

1. Introdução

A construção de barcos na Amazônia está profundamente enraizada na cultura e tradição local. A aplicação de princípios geométricos é crucial para o design das embarcações, envolvendo cálculos para determinar proporções, formas aerodinâmicas e estabilidade.

A elaboração deste trabalho, justifica-se pela necessidade de aprofundarmos os estudos sobre os saberes matemáticos associados a essa prática ajuda a preservar e entender a riqueza cultural da região, além de promover o respeito pela diversidade de conhecimentos.

---

[1] Discente do Curso de Mestrado Acadêmico, ICEN, Universidade Federal do Pará. E-mail: jorsicunhajr2@gmail.com.

[2] Faculdade de Matemática, Universidade Federal do Pará, CUMB – Breves/PA, E-mail: jorsicunha@ufpa.br.

Por outro lado, o cálculo Integral surgiu da necessidade humana de encontrar a área exata de uma região no plano, delimitada por uma ou mais curvas, como por exemplo, determinar os limites de um terreno localizado as margens de um rio, esse foi um dos primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais e ficou conhecido pelos matemáticos da época com quadratura.

O cálculo diferencial é uma área da matemática cujo suas aplicações podem ser vistas no cotidiano de cada um, ela se incorpora as outras ciências de maneira a dar um sentido real aos fenômenos presentes em nosso mundo.

O cálculo moderno é um elemento fundamental em diversas áreas do conhecimento, desde as ciências exatas como matemática, física e química, até campos como engenharia, ciência da computação, estatística, economia e medicina, entre outros. Essa disciplina possibilita a solução de inúmeros problemas e aplicações, impulsionando avanços tecnológicos e sociais.

As integrais de superfície têm diversas aplicações, principalmente na física e engenharia, como na avaliação de fluxo de fluido, calor, campos elétricos e magnéticos, além de cálculos de massa e centro de gravidade. São essenciais para entender o comportamento de sistemas em três dimensões, como a distribuição de calor em um objeto ou a força exercida por um campo elétrico sobre uma superfície [1].

Neste trabalho propomos fazer uma aplicação das integrais de superfícies no cálculo da superfície no casco de uma embarcação, meio de transporte muito utilizado na região amazônica, onde temos o propósito de calcular a área da superfície do casco e encontrar o custo do material utilizado na sua construção, observando os padrões de construção e seu tamanho. Para isso utilizamos uma aplicação de formalismo das integrais de superfície, aproximando com as medidas reais utilizadas pelos carpinteiros navais, profissionais que trabalham na construção de embarcações geralmente em estaleiros, locais usados nas construções.

2. Fundamentação Teórica

Nesta seção vamos inicialmente descrever o que é uma embarcação e em seguida apresentaremos o formalismo da integral de superfície.

Embarcação e Navio: Embarcação (vessel) é uma construção feita de aço, madeira, plástico, ou da combinação desses e outros materiais, que flutua e é destinada a transportar pela água pessoas ou coisas, ou ainda, a extrair, armazenar e transportar produtos retirados das águas ou do solo submarino. [2].

Barco (boat) tem o mesmo significado, mas usa-se para embarcações de menor porte, pilotadas por marítimo de nível médio. Navio, nau, nave, (ship) designam em geral, as embarcações de grande porte, comandadas por marítimo de nível superior [2].

Casco: (hull) É o corpo do navio sem mastreação, ou aparelhos acessórios, ou qualquer outro arranjo. A principal característica de sua forma é ter um plano de simetria (plano diametral) que passa pelo eixo da quilha [2].

Ele dever conter também resistência mínima à propulsão, mobilidade e estabilidade), convés (os pavimentos da embarcação são chamados de conveses. O convés mais alto da embarcação e que é estanque, chama-se Convés Principal. O convés principal é quem "fecha" o casco na parte superior) principal e na maioria dos casos toldo (parte superior da embarcação, serve para cobrir toda ou parte da embarcação).

Com relação ao casco, objeto de nosso estudo divide-se em três partes:

- **Proa:** É a parte frontal da embarcação, tem a forma exterior adequada para mais facilitar e fender o mar;
- **Meia-nau:** É a parte central da embarcação, compreendida entre a proa e a popa:
- **Popa:** É a parte traseira da embarcação. Tem a forma exterior adequada para facilitar a passagem dos filetes líquidos que vão encher o vazio produzido pelo navio em seu movimento, a fim de tornar mais eficiente a ação do leme e do hélice.

No trabalho, vamos considerar os conhecimentos prévios que são os pré-requisitos para o cálculo da integral de superfície como integral e Riemman, integral dupla, mudanças de variáveis na integral dupla; essenciais para o cálculo d integral de superfície, mas que não vamos trabalhar aqui.

Uma integral de superfície é uma generalização da integral dupla para superfícies curvas. É usada para calcular valores como a área da superfície ou o fluxo de um campo vetorial através da superfície. Basicamente, você divide a superfície em pequenos elementos de superfície, calcula o valor da função ou do campo nesses elementos e depois soma esses valores.

A seguir apresentamos o formalismo da integral de superfície.

2.1. Superfície Parametrizada

Uma superfície é dita parametrizada quando podemos descrevê-la por uma função vetorial $\sigma(u, v)$, onde

$$\sigma(u, v) = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\imath} + z(u, v)\vec{k}$$

A função σ transforma a área de um retângulo do plano uv do $\mathbb{R}^2$ em paralelogramo curvilíneo $\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| \Delta u \Delta v$ da superfície de um sólido no $\mathbb{R}^3$.

2.2. Área da Superfície

Segundo [3] Seja $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$, onde K é um conjunto de fronteira com conteúdo nulo e interior não vazio, uma função de classe C^1 no interior de K, a área da superfície σ é dada por:

$$\acute{a}res\ de\ \ \sigma = \iint_K \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| dudv$$

Exemplo1: Calcule a área da superfície $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), u^2 + v^2 \leq 4$.

Sol.: Temos $\frac{\partial\sigma}{\partial u} = (1,0, 2u)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = (0,1, 2v)$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\vec{\imath} - 2v\vec{\jmath} + \vec{k}$$

A área será,

$$\sigma = \iint_K \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} dudv$$

Passando para coordenadas polares

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \sqrt{4\rho^2 + 1}\rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right).$$

Integral de Superfície

Seja K um compacto de $\mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo e interior não vazio, seja $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 em K, regular no interior de K. Seja $w = f(x,y,z)$ uma função de valores reais definida e contínua na imagem de σ. Definimos a integral de superfície de [3] f sobre σ por

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \iint_K f(\sigma(u,v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv$$

Exemplo 2: Calcule $\iint_\sigma f(x,y,z)dS$ sendo $f(x,y,z) = x^2 + y^2$e $\sigma(u,v) = (u,v,u^2+v^2), u^2+v^2 \leq 1$.

Sol.: Temos $f\big(\sigma(u,v)\big) = u^2 + v^2$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = (1,0,2u)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v} = (0,1,2v)$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\vec{i} - 2v\vec{j} + \vec{k}$$

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \iint_K f\big(\sigma(u,v)\big) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| dudv$$

$$= \iint_K (u^2+v^2)\sqrt{4u^2+4v^2+1}dudv$$

Passando para coordenadas polares

$$1\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2\sqrt{4\rho^2+1}\rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15}\right).$$

3. Aspectos Metodológicos

Vamos apresentar em nossa aplicação, utilizando integral de superfície no casco uma embarcação, construído em um estaleiro no município de Breves Estado do Pará, cujas dimensões do casco são 16 metros de comprimento, 4 metros de boca e 2 metros de Pontal, com capacidade para 20 toneladas, como mostra a imagem abaixo

Figura 1: Construção de Embarcação em estaleiro.

4. Descrição e Análise dos Dados

Faremos neste tópico aplicação do trabalho que consiste no uso da integral de superfície para calcular a superfície do casco de uma embarcação. Note que o nosso foco é somente na área da superfície, pois o casco da embarcação tem outros componentes com a quilha que a estrutura principal e funciona como a espinha dorsal da mesma; temos ainda as cavernas que dão forma ao casco, além das longarinas que são vigas longitudinais que reforçam o casco e as vaus, vigas transversais que unem as cavernas tendo a função de suportar o convés.

4.1. Cálculo da área da proa

Não existe uma regra geral para a geometria da proa de uma embarcação, no entanto, na grande maioria assemelha-se à metade de um cone, conforme a figura a seguir

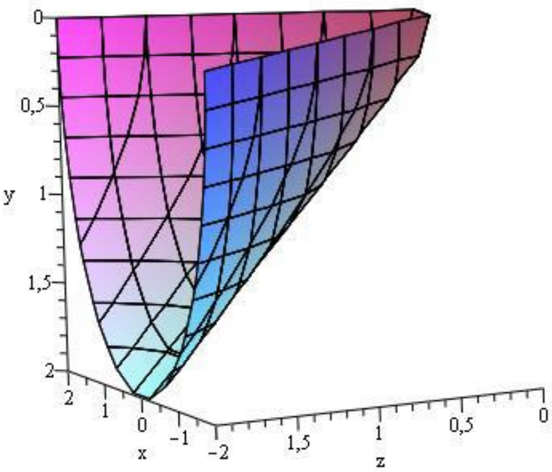

Figura 2: Metade de um cone, representando a proa de uma embarcação

A equação matemática que descreve a figura anterior é dada por $x^2 + y^2 = z^2$, cuja parametrização é dada por $x = x$, $y = y$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, portanto,:

$$\sigma(x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \sqrt{x^2 + y^2}\vec{k}$$

A área da superfície é dada por:

$$\iint_S dS = \iint_k \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_k \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_k \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}\, dA = \iint_K \sqrt{2}\, dA$$

Em coordenadas polares, temos:

$$\iint_S dS = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{2} \rho d\rho d\theta = 2\sqrt{2}\pi \cong 8{,}88$$

Assim a área da proa é $8{,}88 m^2$

4.2. Cálculo da área da meia-nau

Para representação usaremos metade de um cilindro, conforme a figura a seguir

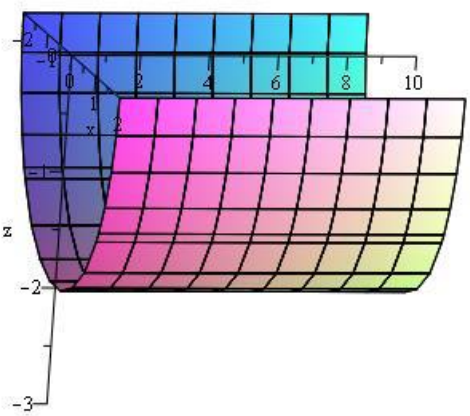

Figura 3: Metade de um cilindro, representando a meia-nau de uma embarcação

Cuja equação é dada por $x^2 + z^2 = 4$, que parametrizando e usando coordenada cilíndricas, temos

$$\sigma(x, y) = \left\{2\cos(u)\vec{\imath} + v\vec{\jmath} + 2sen(u)\vec{k}\right\}$$

Dai, $\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \{-2sen(u), 0{,}2\cos(u)\}$; $\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \{0{,}1{,}0\}$ e $\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| = 2$.

Assim a área é dada

$$\iint_S dS = \iint_K \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| dudv = \iint_K 2dudv$$

Em coordenadas polares temos

$$\iint_S dS = \int_{\pi}^{2\pi} \int_{0}^{10} 2\rho d\rho d\theta = 100\pi \cong 314{,}15$$

Portanto a área da meia-nau é $314{,}15m^2$.

4.3.Cálculo da área da popa

Assim como a proa, a popa também não segue uma regra geral com relação à forma geométrica, o modelo que vamos calcular aqui tem a forma um quarto de um paraboloide, modelo característico da maioria das embarcações. Geralmente é na popa que é fixado o leme, instrumento responsável de definir a direção o guiar a embarcação durante as viagens. A popa em estudo está representada na figura a seguir

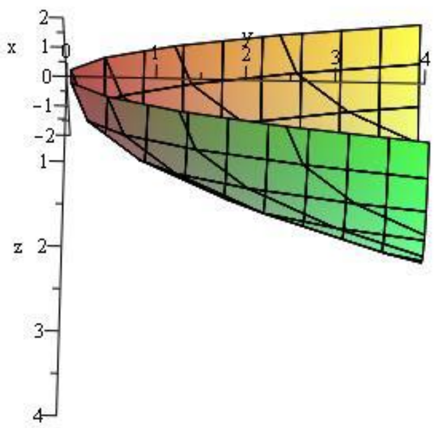

Figura 4: Parte de um paraboloide, representando a popa de uma embarcação

A equação é dada por $x^2 + z^2 = y$ que parametrizando obtemos

$$\sigma(x,y) = x\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + z\vec{k}$$

Note que a superfície tem projeção no plano xz, então

$$\iint_S dS = \iint_k \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA = \iint_k \sqrt{1 + (2x)^2 + (2z)^2}\, dA =$$

$$= \iint_k \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}\, dA$$

Usando coordenadas polares temos,

$$\iint_S dS = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^2 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta \cong \frac{17\pi\sqrt{17} - \pi}{12} \cong 18{,}08$$

Logo a área da proa é $18{,}08 m^2$.

4.4.**Análise dos Dados**

Portanto a área total do casco da embarcação será a soma das respectivas meia-nau, popa e proa, totalizando aproximadamente $89{,}79m^2$. Em uma pesquisa feita no município onde efetuou-se a construção da embarcação, pode-se observar a madeira mais usada para fazer a superfície do casco é a itaúba e que um dos métodos para à venda dessa madeira de lei é o "palmo", custando em média 7,00 reais o palmo. Nessa análise de dados pretendemos encontrar o custo da construção do forro exterior do casco da embarcação, resolvemos então transformar ambas as medidas em metros cúbicos. Como o casco da embarcação foi construído com madeira de 3 centímetros de espessura, temos que $89{,}79m^2x0{,}03m = 2{,}6937m^3$ foi a quantia necessária de madeira para construção. De outro lado temos o "palmo" que equivale a $0;00102m^3$ de madeira, logo para acharmos a quantia de "palmos" necessários faremos $26937 \div 0{,}00102 = 2.640{,}88$ palmos, assim, para encontrarmos o custo do forro exterior multiplicamos os "palmos" necessários pelo seu custo $2.640{,}88x7 = 18.486{,}16$. Desta forma encontramos o custo da área da superfície do casco da embarcação que é de R$ 18.486,16.

A construção naval ancestral envolve o uso de princípios geométricos, medidas e cálculos, transmitidos oralmente e incorporados nas práticas de construção [4]. A buscamos compreender como esses conhecimentos são aplicados na prática, destacando a importância da cultura, do meio ambiente e da experiência na construção de embarcações.

5. Considerações Finais

Com a pesquisa sobre esse conteúdo, percebe o quão ampla é a matemática, e o quanto pode contribuir mesmo que indiretamente, na vida de cada ser humano, não se restringindo somente à sala de aula, mas está presente diretamente no cotidiano das pessoas, uma vez que os carpinteiros navais (construtores de embarcações) na grande maioria não possuem um grau de instrução escolar, sendo que o conhecimento dos mesmos são adquiridos na prática, sendo que a Matemática Espontânea os métodos matemáticos desenvolvidos por povos na sua luta de sobrevivência [5]".

Assim pesquisamos conhecimentos sobre embarcações referindo-os ao estudo dos conhecimentos matemáticos presentes na construção e uso dessas embarcações por comunidades tradicionais, especialmente na região amazônica.

Desta forma, a finalidade deste trabalho, foi mostrar de uma forma clara e objetiva uma aplicação das integrais de superfícies no ramo da engenharia naval, tentando aproximar o cálculo aprendido no curso de graduação do cotidiano e da realidade vivenciada nos diversos estaleiros de construções de embarcações.

6. Referências

[1] STRAUCH, Irene; ***Análise Vetorial em dez aulas***. Porto Alegre: Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Instituto de Matemática 2008.

[2] FONSECA, Murilo F; ***Arte naval. serviços de documentação geral da marinha***.5ª.ed.1989.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton L.; ***Um Curso de Cálculo***. L T C. Vol. 3,

[4] BRITO, Alessandra de P. R. e LIMA, Eusom P,; ***Saberes e fazeres matemáticos encontrados na construção de barcos na Amazônia.*** Revista Foco, Vol. 17, n. 3, 2025.

[5] D'AMBRÓSIO, Ubiratam. ***Etnomatemática - Arte ou Técnica de Conhecer*** – Ed. Ática – São Paulo – 1990.