SIMPÓSIO DE INTEGRAÇÃO, INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

A IMPORTÂNCIA DAS FERRAMENTAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ESTUDO DAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Kauan Fernandes Gadêlha Loureiro [1]
Luciene Pinheiro Lopes [2]

RESUMO: As ferramentas do cálculo diferencial e integral exercem um grande papel na caracterização das distribuições de probabilidade discretas e contínuas, destacando-se o uso de derivadas, integrais e séries numéricas e de potências. Através do estudo das relações do cálculo diferencial e integral com as distribuições de probabilidade, um método foi criado para geração dos momentos de ordem n de uma variável aleatória qualquer, sem a necessidade da contínua utilização de derivadas como ocorre nos métodos usualmente utilizados para obtenção dos momentos de ordem n. Este método consiste na comparação de uma função característica qualquer de uma variável aleatória escrita na sua representação em série de potências com a representação da função característica de probabilidade em questão em termos de sua série numérica, assim gerando uma expressão geral para obtenção dos momentos de ordem n de uma variável aleatória qualquer, se tornando vantajosa em relação aos métodos comumente utilizados.
Palavras-chave: Momentos de ordem n, função característica de probabilidade, séries de MacLaurin, Cálculo diferencial e integral, função geradora de momentos

ABSTRACT: The tools of differential and integral calculus play a fundamental role in the characterization of discrete and continuous probability distributions, particularly through the use of derivatives, integrals, and numerical and power series. Researching the connections between calculus and probability distributions, a new method was created to obtain the *n*th-order moments of an arbitrary random variable, eliminating the need for the repeated application of derivatives typically required by conventional techniques. This method is based on comparing a generic characteristic function of a random variable—expressed as a power series expansion—with the numerical series representation of the specific characteristic function of interest. As a result, a general formula to determine the *n*th-order moments of any random variable is obtained, which proves to be advantageous when compared to the usual methods.
Keywords: n-th order moments, characteristic function of probability, MacLaurin series, Differential and integral calculus, Moment-generating function

[1] Estudante da licenciatura em química (IFB), IFB – Campus Gama, kauan62468@estudante.ifb.edu.br
[2] Doutora em matemática (UnB), Docente do IFB – Campus Gama, luciene.lopes@ifb.edu.br

Introdução

As ferramentas do cálculo diferencial e integral se fazem presente no estudo das distribuições de probabilidade, desde sua definição, momentos e principalmente na avaliação de funções que a caracterizam, como a função geradora de momentos e a função característica de probabilidade. Observe que tratar dos momentos de ordem n de uma variável aleatória, $n \in \mathbb{N}$, é de extrema importância, dado que a partir dos momentos se pode fazer importantes afirmações acerca do comportamento de uma distribuição de probabilidade. Quando o segundo momento é finito, a variância σ^2 é finita, garantindo a validade do Teorema do Limite Central (TLC). Este teorema é a base da construção da estatística inferencial, permitindo a simplificação da modelagem de dados, uma vez que se é assumido que a soma de variáveis aleatórias, sob certas condições de regularidade, é normalmente distribuída.

Este trabalho tem como objetivo a caracterização das distribuições de probabilidade a partir das ferramentas do Cálculo diferencial e integral. Como resultado disto, uma expressão geral para os momentos de ordem n de uma variável aleatória qualquer foi obtida. Os métodos comumente usados na literatura para gerar os momentos de ordem n de uma variável aleatória obtêm os momentos um a um.

Uma das justificativas para a realização deste trabalho é mostrar que o estudo das distribuições de probabilidade quando pensado para cursos diferentes dos de matemática ou estatística, como a química e a física, permite aos estudantes verificar a amplitude da utilização das ferramentas do cálculo e sua aplicabilidade nas mais diversas áreas. Na matriz curricular de cursos superiores na área de exatas e em alguns cursos na área de humanidades, o cálculo diferencial e integral, pensado em funções reais, se faz presente. O discente que tem a oportunidade de cursar disciplinas também na área de probabilidade, terá mais facilidade em aprender as disciplinas do cálculo além de expandir seu conhecimento para o cálculo diferencial e integral com conceitos sobre integrais impróprias e com o uso da unidade imaginária como ocorre, por exemplo, na utilização da função característica de probabilidade que é uma função definida nos complexos e assumindo valores nos complexos, fortalecendo o entendimento de vários conceitos na sua área especifica.

Revisão de literatura

Os momentos de ordem n ($E[X^n]$) de uma variável aleatória são necessários para a caracterização de uma distribuição de probabilidade que é um dos nossos objetivos. Matematicamente, $E[X^n]$ é dado por:

$$E[X^n] = \begin{cases} \sum_{x} x^n P(X = x), \text{ caso discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)dx, \text{ caso contínua} \end{cases}$$

Onde:

- $P(X = x)$ representa a probabilidade pontual em x (função massa de probabilidade)
- $f_X(x)$ representa a função densidade de probabilidade
- n representa a ordem do momento
- x representa os valores assumidos pela variável aleatória X.

A função geradora de momentos (f.g.m) e a função característica de probabilidade (f.c.p) permitem a obtenção dos momentos de ordem n de uma variável aleatória. Por esta razão, a revisão de literatura iniciou-se com a definição e principais propriedades das funções mencionadas.

A função geradora de momentos (f.g.m) é uma importante função para as distribuições de probabilidade, uma vez que através das derivadas da f.g.m surgem os momentos. A f.g.m pode ser definida como:

$$M_X(t) = \begin{cases} E[e^{tX}] = \int_{0}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx \text{, para } X \text{ contínua} \\ \sum_{x} e^{tx} P(X = x), \text{ para } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Onde:

- $t \in \mathbb{R}$
- E representa o valor esperado (esperança matemática ou média)
- $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade, caso contínuo
- $P(X = x)$ representa a probabilidade pontual em x, caso discreto
- x representa os valores assumidos pela variável aleatória X.

A função geradora de momentos possui importantes propriedades, como por exemplo:

- Caso exista, a função geradora de momentos determina unicamente a distribuição de uma variável aleatória X (Diferentes variáveis aleatórias com a mesma f.g.m estão igualmente distribuídas)
- A derivada de ordem n da f.g.m em $t = 0$ dá o momento de ordem n de uma distribuição de probabilidade, ou seja:

$$M^{(n)}{}_X(0) = E[X^n]$$

Já a função característica de probabilidade (*f.c.p*) de uma variável aleatória X é fundamental para a caracterização de uma distribuição de probabilidade, uma vez que esta apresenta importantes afirmações acerca da construção de uma distribuição de probabilidade e suas configurações. A função característica de probabilidade tem sua definição descrita abaixo: Seja X uma variável aleatória discreta ou contínua, a função característica de probabilidade representada por $\varphi_X(t)$ é definida como:

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} E\left[e^{itX}\right] = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx, \text{ para } X \text{ contínua} \\ \displaystyle\sum_x e^{itx} P(X = x), \text{ para } X \text{ discreta} \end{cases}$$

Onde:

- $t \in \mathbb{R}$
- E representa o valor esperado (esperança matemática ou média)
- i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$)
- $f_X(x)$ é a função densidade de probabilidade, caso contínuo
- $P(X = x)$ representa a probabilidade pontual em x, caso discreto
- x representa os valores assumidos pela variável aleatória X

A *f.c.p* possui diversas propriedades, como por exemplo:

- A função característica, diferentemente da função geradora, sempre existe.
- Unicidade: Se duas ou mais variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$ possuem a mesma função característica, elas estão igualmente distribuídas.
- A função característica é sempre contínua em t
- Se X tem momentos de ordem n, então a n-ésima derivada da *f.c.p* existe em $t = 0$, e:

$$\varphi^{(n)}{}_X(0) = i^n E[X^n]$$

Através destas propriedades, importantes avaliações podem ser realizadas sobre as distribuições de probabilidade e importantes relações podem ser visualizadas, como a representação em séries de MacLaurin da *f.c.p:*

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n i^n E[X^n]}{n!} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{[\varphi^{(n)}{}_X(0)].t^n}{n!} \quad \mathbf{(1)}$$

Observe que esta representação se adequa a propriedade citada anteriormente onde:

$$\varphi^{(n)}{}_X(0) = i^n E[X^n]$$

Esta relação é fundamental para o método para obtenção dos momentos de ordem n criado neste trabalho e que será apresentado em breve.

Resultados

A partir da relação descrita em (1) e da comparação da função característica de uma variável aleatória qualquer em séries de potências com a representação geral em série numérica da função característica da variável aleatória específica foi criado um método para obtenção dos momentos de ordem n de uma variável aleatória.

Para ilustrar o método, foram escolhidas duas variáveis aleatórias específicas que são: $X \sim Uniforme$ e $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Para $X \sim Uniforme$, sua função característica é escrita como:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} \quad \mathbf{(2)}$$

Observe que os termos e^{itb} e e^{ita} da expressão em (2) podem ser reescritos como a série de MacLaurin de e^x:

$$e^{ita} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!}, e^{itb} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itb)^n}{n!}$$

Desta maneira, podemos reescrever a função característica de probabilidade $\mathbf{(2)}$ da seguinte forma:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} = \frac{1}{it(b-a)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itb)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ita)^n}{n!} \right] \quad \mathbf{(3)}$$

Reorganizando em (3):

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n (b^n - a^n)}{it(b-a)n!} = \quad \mathbf{(4)}$$

Agora, com a função característica de probabilidade da variável aleatória $X \sim Uniforme$ representada em séries de potência, podemos compará-la com a relação $(\mathbf{1})$ iniciando-se em $n = 1$, da seguinte maneira:

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\varphi^{(n)}{}_X(0)(t)].t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1} i^{n-1} E[X^{n-1}]}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(it)^{n-1}(b^n - a^n)}{(b-a)n(n-1)!}$$

Observamos que:

$$[\varphi^{(n)}{}_X(0)] = \frac{i^{n-1}(b^n - a^n)}{(b-a)n} \quad (\mathbf{5})$$

Pela comparação das séries, sabemos que:

$$[\varphi^{(n)}{}_X(0)] = i^{n-1} E[X^{n-1}] \quad (\mathbf{6})$$

Agora comparando (5) e (6):

$$E[X^{n-1}] = \frac{i^{n-1}(b^n - a^n)}{n(b-a)i^{n-1}} = \frac{(b^n - a^n)}{(b-a)n}, n \geq 2 \quad (\mathbf{7})$$

Ou seja, para o primeiro momento, fazemos $n = 2$, logo:

$$E[X^{2-1}] = E[X] = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{(b+a)}{2} \quad (\mathbf{8})$$

Já para o segundo momento, fazemos $n = 3$, logo:

$$E[X^{3-1}] = E[X^2] = \frac{(b^3 - a^3)}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} = \frac{(b^2 + ab + a^2)}{3} \quad (\mathbf{9})$$

Agora podemos repetir os mesmos passos para a variável aleatória $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Sua função característica é dada por:

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha} \quad (\mathbf{10})$$

Esta função pode ser representada em séries de potência da seguinte maneira:

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) n!} \left(\frac{it}{\beta}\right)^n \quad (\mathbf{11})$$

Agora podemos comparar a expressão obtida em (11) com a relação obtida em $(\mathbf{1})$ da seguinte maneira:

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n i^n E[X^n]}{n!} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{[\varphi^{(n)}{}_X(0)].t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha) n!} \left(\frac{it}{\beta}\right)^n \quad (\mathbf{12})$$

Observamos em (12) que:

$$[\varphi^{(n)}{}_X(0)] = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{i}{\beta}\right)^n \quad (\mathbf{13})$$

Pela comparação das séries sabemos que:

$$[\varphi^{(n)}{}_X(0)] = i^n E[X^n] \quad (\mathbf{14})$$

Logo:

$$E[X^n] = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{i}{\beta}\right)^n \frac{1}{i^n} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^n} \quad \mathbf{(15)}$$

Para o primeiro momento, fazemos $n = 1$ em (15):

$$E[X^n] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta} \quad \mathbf{(16)}$$

Pela propriedade da função gamma:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \mathbf{(17)}$$

Substituindo (17) em (16):

$$E[X] = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \mathbf{(18)}$$

Já para o segundo momento, fazemos $n = 2$ em (15):

$$E[X^2] = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^2} \quad \mathbf{(19)}$$

Pelas propriedades da função gamma:

$$\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \quad \mathbf{(20)}$$

Substituindo (20) em (19):

$$E[X^2] = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta^2} = \frac{(\alpha+1)(\alpha)}{\beta^2} \quad \mathbf{(21)}$$

O método criado neste trabalho torna muito mais simples e direto a obtenção dos momentos de ordem n de uma variável aleatória qualquer. Caso quiséssemos obter os momentos a partir dos métodos comumente utilizados (f.g.m e f.c.p), seria necessário, por exemplo, para obter o momento de ordem 5, derivar 5 vezes, de maneira análoga, o mesmo cálculo se repetiria para o cálculo do momento de qualquer ordem, o que torna o cálculo mais trabalhoso e sujeito a erros de derivação, enquanto para este método basta realizar a substituição do momento que se deseja na fórmula geral, obtendo-o diretamente da expressão.

Referências bibliográficas

CHUNG, Kai Lai. **A course in probability theory**. 3. ed. San Diego: Academic Press, 2001.

CORTE, Israel Magalhães. **Projeto O Teorema Central do Limite na Construção da Estatística Inferencial**. Edital 07/2023 PIBIC CNPq/IFB. Orientação: Luciene Pinheiro Lopes.

DEGROOT, Morris H.; SCHERVISH, Mark J. **Probability and statistics**. 4. ed. Boston: Pearson, 2012.