6º SIMPIF SIMPÓSIO DE PESQUISA INOVAÇÃO E PÓS-GRADUAÇÃO DO INSTITUTO FEDERAL DA PARAÍBA
2025 23 a 25 julho
MAR DE IDEIAS Ciência, Inovação e Sustentabilidade para um planeta em transformação

FUNÇÕES INVERTÍVEIS: UMA APLICAÇÃO UTILIZANDO FILTRO EM IMAGENS DIGITAIS

ESTER GOMES DE FIGUEIRÊDO (IFPB, Campus Campina Grande), JONATHAS JERÔNIMO BARBOSA (IFPB, Campus Campina Grande)

E-mails: figueiredo.ester@academico.ifpb.edu.br, jonathas.barbosa@ifpb.edu.br.

Área de conhecimento:(Tabela CNPq): 1.01.00.00-8 Matemática.

Palavras-Chave: função invertível; transformação no tempo e na frequência;

1 Introdução

A busca por solução de problemas apresentados por uma necessidade cotidiana, por um problema real ou por uma conjectura científica move o mundo desde os seus primórdios. Em matemática, tão importante quanto obter a solução de um problema posto é garantir que, primeiramente, ela exista. Dependendo da situação, é desejável que ela seja única ou, ainda, é importante verificar, de antemão, que o problema em questão não apresente solução, evitando, dessa forma, que o tempo dos pesquisadores envolvidos seja desperdiçado.

Outro ponto bastante importante no fazer matemático é o que se chama de mudança de espaços. A dificuldade na resolução de um problema pode mudar dependendo do espaço em que ele seja abordado. As funções que admitem inversas carregam a vantagem de transportar os elementos de um espaço para outro. Nesse contexto, essas funções são bastante relevantes, pois podem ser utilizadas como “pontes” entre diferentes espaços, permitindo a análise ou resolução de problemas sob novas perspectivas. No caso específico deste trabalho, a transformada de Fourier (TF) será o vetor da mudança de espaços para a filtragem da imagem digital.

As séries e transformadas de Fourier, assim como sua inversa, são ferramentas que envolvem o trato de funções e alguns problemas de alta complexidade, e possuem aplicações, como, por exemplo, no processamento de imagens, para restauração, aguçamento, suavização, bem como redução do custo computacional, entre outras. Sendo assim, devido à sua importância, o estudo da transformada de Fourier se justifica.

2 Materiais e Métodos

Para realizar o presente trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre a TF e a Transformada de Fourier inversa (TFI), sobre os espaços em que estas transformações admitem inversa o que promove a possibilidade do uso de diferentes ferramentas matemáticas nos diferentes espaços em que a função se encontra (tempo e frequência). Nesse momento, essa característica foi explorada.

Para ilustrar esta possibilidade foi apresentada uma aplicação da Transformada como filtro em imagens digitais. Nesta situação a imagem foi submetida a um filtro para a eliminação de ruído periódico. Esse trabalho é um recorte adaptado já publicado de uma pesquisa de TCC - (FIGUEIRÊDO, 2025).

3 Resultados e Discussão

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, define-se a **Transformada de Fourier** por:

$$F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx \tag{1}$$

De acordo com (FIGUEIREDO, 1977) *apud*, (FIGUEIRÊDO, 2025) o espaço $\mathcal{S}$ é um subconjunto de $\mathcal{L}^1$, chamado de conjunto de funções de decrescimento rápido. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função $\mathcal{S}$ se for infinitamente diferenciável se $\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0$, para todo $m, n \geq 0$ pertencente aos inteiros. Em outras palavras, tanto a função quanto todas as suas derivadas decrescem mais rapidamente do que qualquer potência de $1/|x|$ quando $|x| \to \infty$.

Dessa forma, se a transformada de Fourier inversa é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} F(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

quando dada uma função de $\mathcal{S}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sua transformada é definida por $F(\xi)$.

A **Série Discreta de Fourier**, se tiver um sinal de tempo discreto periódico com período N, pode ser definida como:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j2\pi kn/N} \tag{3}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \tag{4}$$

Um sinal de duração limitada pode ser considerado como um sinal periódico com período N. Neste caso, é chamada de **Transformada Discreta de Fourier (DFT)**, também conhecido como DTFT.

Para o processamento de imagens, a transformada de Fourier decompõe a imagem em uma combinação de oscilações com diferentes frequências, fases e orientações. A transformada discreta de Fourier de uma imagem que possui tamanho $M \times N$ é uma imagem F definida como:

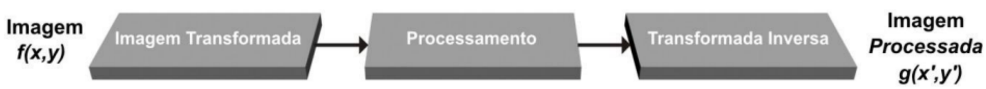
$$F(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) e^{-j2\pi\left(\frac{vm}{M} + \frac{w}{N}\right)} \tag{5}$$

E sua inversa é definida como:

$$f(m,n) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{+j2\pi\left(\frac{vm}{M} + \frac{vn}{N}\right)} \tag{6}$$

Segundo (FIGUEIRÊDO, 2025), a Figura 1, a qual mostra a esquematização do processamento da seguinte forma: primeiro, é feita a aplicação da transformada de Fourier para possibilitar o tratamento adequado. Em seguida, após os ajustes necessários, aplica-se a transformada de Fourier inversa, para que a imagem retorne ao seu domínio original. Um exemplo disso é a Figura 2, onde é mostrado o processamento de imagem utilizando uma máscara para redução de ruído.

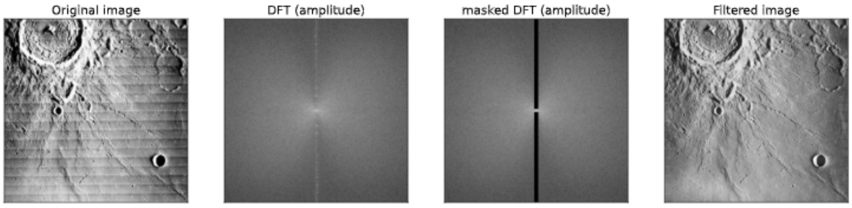
Figura 1: Aplicação de Mascara para redução de Ruído



Fonte: (CáMARA-CHáVEZ, 2025)

Observe a Figura 2 com a primeira imagem. Fala-se que a imagem (original) está no chamado, domínio do espaço. Ela apresenta um ruído periódico que pode ser observado na forma de “listras” na horizontal. Quando é utilizado a transformada de Fourier, a característica do ruído também é observado na sua magnitude, que pode ser observado, nesse caso, como vários pontos alinhados ao centro na vertical. Nesse caso, é dito que o espectro de Fourier está no domínio da frequência. Após a aplicação do filtro no ruído, a Transformada Inversa

Figura 2: Aplicação de Mascara para redução de Ruído



Fonte: (MAZET, 2025)

de Fourier irá converter a magnitude (ou o espectro de Fourier que está no domínio da frequência) novamente em uma imagem no domínio do espaço. Na quarta imagem (imagem filtrada), é mostrado a imagem com a redução de ruído. A Transformada de Fourier facilita o processamento de imagens, pois ao invés de trabalhar com toda a imagem, o computador irá trabalhar apenas com uma sequência de pontos, por exemplo, o que reduzirá o custo computacional.

4 Considerações Finais

Problemas de naturezas e áreas diversas apresentam métodos de soluções com abordagens distintas. Há problemas que podem ser solucionados de maneira direta - partindo das suas hipóteses e chegando à sua tese, há problemas em que o maior anseio é determinar se há alguma solução e há problemas que se for possível ser apresentado em outro ambiente (em linguagem matemática) outro conjunto ou outro espaço podem ter sua complexidade bastante reduzida. Problemas de engenharia reversa, por sua vez, analisam o produto final para entender como ele é produzido e com isso poder trabalhar sobre os processos e alterar, ajustar e otimizar o produto.

Um exemplo dessa situação foi abordado quando a transformada de Fourier foi utilizada no processamento de imagens digitais. O que, no domínio do espaço, era um trabalho longo e computacionalmente custoso, pois o tratamento seria feito na vizinhança de cada pixel da imagem, com a aplicação da transformada e consequente mudança para o domínio ou espaço das frequências, leva o problema a uma circunstância de processamento mais fácil e direto, devido às características intrínsecas desse espaço. O processamento, principalmente para elementos periódicos, como ruído periódico, tem tratamento mais imediato no domínio da frequência.

Agradecimentos

Agradeço ao IFPB campus Campina Grande pelo apoio à pesquisa.

Referências

CáMARA-CHáVEZ, G. *Processamento de Imagens – Transformada de Fourier 1 e 2*. 2025. <http://www.decom.ufop.br/guillermo/BCC326/slides/Processamento%20de%20Imagens%20-%20Tranformada%20de%20Fourier%201%20e%202.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2025.

FIGUEIREDO, D. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977. (Projeto Euclides).

FIGUEIRÊDO, E. *Uma aplicação visual da transformada de Fourier e algumas considerações a respeito da inversa de funções*. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso Superior de Licenciatura em Matemática) — Instituto Federal da Paraíba, Campina Grande, 2025. 62 f.

MAZET, V. *BIP Restoration*. 2025. <https://vincmazet.github.io/bip/restoration/>. Acesso em: 3 mar. 2025.