

Resolução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica utilizando o Método de Weeks para a Inversão Numérica da Transformada de Laplace

Jovane R. Silva¹, Bárbara D. do Amaral Rodriguez², João F. Prolo Filho³

¹Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, FURG, jovanesjn@gmail.com

²Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, FURG, barbararodriguez@furg.br

³Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, joaoprolo@furg.br

Resumo. O presente artigo tem como objetivo principal apresentar os aspectos computacionais do método de Weeks quando aplicado na inversão numérica da Transformada de Laplace para a obtenção da solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica. Esta técnica é caracterizada pelo uso dos polinômios de Laguerre como base para a aproximação numérica. No desenvolvimento deste trabalho, os resultados obtidos de forma numérica foram comparados com os gerados analiticamente. Além disso, diferentes valores para as variáveis x e t foram testados, a fim de verificar a precisão e eficácia do método utilizado. Para tal, foi empregada a métrica do Erro Absoluto Médio, com o objetivo de estimar o número de termos necessários no somatório, chamado N ótimo (N_o), e obter o melhor resultado entre as soluções analíticas e numéricas.

Palavras-chave. Equação Diferencial Parcial Parabólica; Método de Weeks; Transformada de Laplace; Inversa Numérica.

1. INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais (ED) são o suporte matemático para diversas áreas da ciência e engenharia [18] e surgem a partir da tentativa de formular ou descrever fenômenos físicos em termos matemáticos. São equações que envolvem derivadas de uma função desconhecida, podendo ser classificadas como ordinárias (EDOs) (com apenas uma variável independente) ou parciais (EDPs) (com mais de uma variável independente) [18]. Entre as EDPs, destacam-se as Equações Diferenciais Parciais Parabólicas (EDPPs) que estão presentes em diferentes contextos de aplicações, tais como, no estudo das variações de temperaturas no solo [9], em problemas envolvendo difusão de partículas [5] e na mecânica de fluidos [15].

Entre os diferentes métodos para resolução de EDPPs, destaca-se a Transformada de Laplace (TL). Segundo Pacheco [10], a TL pode ser caracterizada pela aplicação de um operador integral em uma função f , geralmente dependente do tempo t . Por meio desse procedimento, f é conduzida a um novo domínio, chamado “domínio de Laplace”, onde a dependência é em termos da variável s e as manipulações algébricas são, normalmente, mais simples.

Particularmente, quando se usa a TL para resolução de problemas físicos modelados matematicamente por EDPPs, as correspondentes soluções são escritas em função da variável s [1]. Neste caso, faz-se necessário retornar ao domínio de origem por meio da inversão da Transformada de Laplace. Porém, dependendo da complexidade do problema

estudado, a inversão da TL por meios analíticos torna-se inviável. A partir de tal necessidade e da busca por resultados cada vez mais precisos, surgem os métodos de inversão numérica da TL [1], [13]. Existem na literatura diferentes técnicas de inversão numérica as quais podem se basear, por exemplo, no emprego das aproximações por séries de Fourier [8], na fórmula de Post-Widder [16], na expansão da função original em uma série de funções ortogonais [4], ou ainda, na deformação do contorno de integração de Bromwich [12].

Dentro deste contexto, este trabalho consiste na aplicação da inversão da Transformada de Laplace de maneira numérica e analítica na resolução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica [3]. Para a solução numérica, é utilizado o método de Weeks, desenvolvido em 1965, no qual faz-se uma expansão em série da f em termos das funções ortonormais de Laguerre [4]. O Erro Absoluto Médio, entre os perfis analítico e numérico, é computado e empregado como métrica para a escolha do N ótimo (N_o) na tentativa de obter as melhores aproximações para os resultados em comparação aos obtidos analiticamente. Testes para diferentes valores de t ($t = 0,005$, $t = 0,05$ e $t = 0,5$) e x são realizados e registrados na forma de tabelas. São, ainda, apresentadas figuras dedicadas a ilustração, não só dos testes de varredura para obtenção do N_o para cada t escolhido, mas também do comportamento da solução da EDPP propriamente dita.

Para uma melhor compreensão, este artigo foi organizado da seguinte maneira: a seção 2 descreve o método de Weeks, técnica numérica utilizada para a resolução da Equação Diferencial Parcial Parabólica. Na seção 3, faz-se a apresentação da equação a ser resolvida, do equacionamento após a aplicação da TL e da solução analítica. Ainda, são fornecidos os resultados obtidos por meio das simulações feitas com o algoritmo de inversão numérica e a expressão para o cálculo do Erro Absoluto Médio. A seção 4 é dedicada às considerações acerca da eficiência do método e apresentação das perspectivas para trabalhos futuros.

2. METODOLOGIA

O método de Weeks para a inversão numérica da Transformada de Laplace consiste na aproximação da função em seu domínio inicial em termos da função transformada, utilizando os polinômios de Laguerre como base da expansão. Segundo Wang e Zhan [16], essa aproximação é dada por:

$$f_W(t) \approx e^{\sigma t} \sum_{j=0}^N a_j L_j \left(\frac{t}{g} \right), \quad (1)$$

onde $L_j()$ representa o j -ésimo polinômio de Laguerre [4], a_j é o coeficiente de Taylor.

Ainda

$$\sigma = \Psi - \frac{1}{2g}, \quad g = \frac{T_{max}}{N}, \quad \Psi = \left(\alpha + \frac{1}{T_{max}} \right) H \left(\alpha + \frac{1}{T_{max}} \right),$$

sendo g um fator de escala, $H()$ a função de Heaviside, N a quantidade de termos adotados no somatório dos polinômios de Laguerre e T_{max} o maior valor de t para o intervalo onde a função é avaliada. Neste estudo, utiliza-se $\alpha = 1$, como indicado por [16]. Além disso, os coeficientes de Taylor são definidos por

$$a_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k), \quad (2)$$

$$a_j = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k) \cos(j\theta_k), \quad (3)$$

onde

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} \frac{2k+1}{N+1}, \quad (4)$$

com $k = 0, 1, \dots, N$,

$$h(\theta_k) = \frac{1}{T_n} \left\{ \Re \left[F \left(\Psi + \frac{i}{2g} \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right] - \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \Im \left[F \left(\Psi + \frac{i}{2g} \cot \left(\frac{\theta_k}{2} \right) \right) \right] \right\}, \quad (5)$$

para $\Re()$ e $\Im()$ representando, respectivamente, a parte real e imaginária da função e $T_n = 2g$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos a partir do uso do método de Weeks [17] na resolução da EDPP proposta por Heydarian, Millineux e Reed [7] pelo método da Transformada de Laplace. Os algoritmos computacionais foram implementados no software livre OCTAVE, versão 9.1.0, em um notebook Intel(R) Core(TM) I3-10110U, @2.10GHz, com Sistema Operacional Windows de 64 bits e memória RAM de 4GB.

3.1. Equação Diferencial Parcial Parabólica

Considera-se o modelo matemático descrito por

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad (6)$$

com condições inicial e de contorno dados por,

$$u(x, 0) = 1 \quad (7)$$

e

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \quad (8)$$

Aplicando-se a TL na variável t , na Equação (6) e nas condições de contorno (Equação (8)), e substituindo-se a condição inicial (Equação (7)), reescreve-se as Equações (6) e (8) no domínio de Laplace

$$\frac{d^2\bar{U}(x,s)}{dx^2} - S\bar{U}(x,s) = -1, \quad (9)$$

$$\bar{U}(0,s) = 0, \quad \bar{U}(1,s) = 0. \quad (10)$$

A solução do problema transformado representados pelas Equações (9) e (10) é dada por

$$\bar{U}(x,s) = -\frac{1}{s} \cosh(\sqrt{s}x) + \frac{\cosh(\sqrt{s}) - 1}{s \operatorname{senh}(\sqrt{s})} \operatorname{senh}(\sqrt{s}x) + \frac{1}{s}. \quad (11)$$

Manipulando-se algebraicamente a Equação (11) e substituindo as fórmulas de adição para funções hiperbólicas [14], chega-se a

$$\bar{U}(x,s) = \frac{1}{s \operatorname{senh}(\sqrt{s})} [\operatorname{senh}[\sqrt{s}(x-1)] - \operatorname{senh}(\sqrt{s}x) + \operatorname{senh}(\sqrt{s})]. \quad (12)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace inversa [14] e suas propriedades, na Equação (12), chega-se a solução da EDPP,

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}}{2n+1} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi x]. \quad (13)$$

Para efeitos de simulação e geração das tabelas e gráficos, o somatório da Equação (13) foi truncado em $M = 5$ termos.

3.2. Aplicação do Método de Weeks na Obtenção da Solução da EDPP

Uma vez que o algoritmo de inversão da TL, usado aqui, aproxima a solução desejada em termos de uma série (Equação (1)), saber o número de termos mais adequados para que o método numérico forneça a melhor precisão possível é de extrema importância para o teste de eficiência. Entretanto, apesar dessa escolha poder ser feita de muitas formas, poucas informações na literatura tem-se a esse respeito [6]. Este trabalho propõe que a métrica para escolha do melhor N (ou N_o) seja feita em termos do Erro Absoluto Médio (\bar{E}_{abs}). Essa estratégia, foi descrita primeiramente por [2], também adotada por [11] e é aqui adaptada como,

$$\bar{E}_{abs}(t) = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} |u_a(x_i, t) - u_W(x_i, t)|, x_i \in [0, 1], t \in \Re^+, \quad (14)$$

onde u_a representa a função transformada de forma analítica, u_W , de forma numérica por meio do método de Weeks e N_x representa a quantidade de valores de x utilizados para obter o perfil de solução. Em especial, para a geração dos resultados, optou-se por um intervalo $0 \leq x \leq 1$, com 11 subdivisões.

Para medir a sensibilidade da aproximação da solução da EDPP pelo método numérico proposto, em termos da variável t , a métrica do Erro Absoluto Médio foi aplicada da seguinte forma: para cada instante de t desejado ($t = 0,005$, $t = 0,05$ e $t = 0,5$) uma versão da Equação (1) para u_W foi executada para diferentes valores de N ($N = 1, \dots, 50$), na forma de varredura, e os respectivos resultados foram substituídos na Equação (14). Então, para cada valor de t , o valor de N , que resultou no menor \bar{E}_{abs} , foi chamado de N ótimo (ou N_o) e usado para a simulação dos perfis aqui apresentados.

Para o primeiro caso, onde $t = 0,005$, obteve-se um Erro Absoluto Médio de $5,7605 \times 10^{-5}$, sendo seu respectivo $N_o = 21$ (Figura 1).

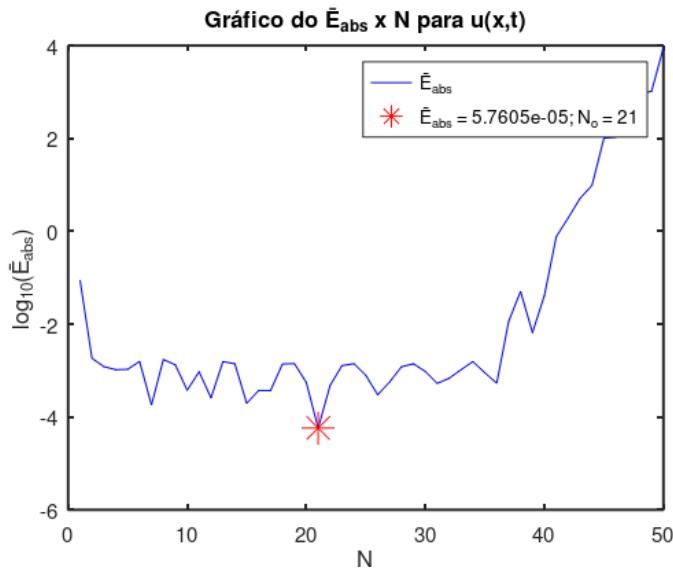


Figura 1. Erro Absoluto Médio e N_o para $t = 0,005$. Fonte: O autor.

A partir da aplicação da fórmula do Erro Absoluto Médio para $t = 0,05$, foi obtido um $N_o = 35$, gerando um erro de $5,9496 \times 10^{-6}$ (Figura 2). Já para o terceiro caso, onde $t = 0,5$, obteve-se $N_o = 30$, gerando um Erro Absoluto Médio de $1,0331 \times 10^{-6}$ (Figura 3).

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam comparações entre as soluções analítica e numérica para diferentes valores de x e t .

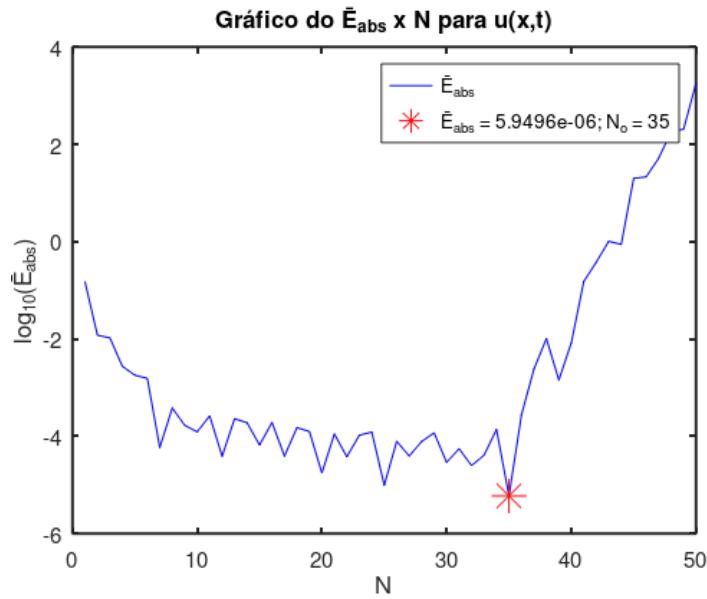


Figura 2. Erro Absoluto Médio e N_o para $t = 0,05$. Fonte: O autor.

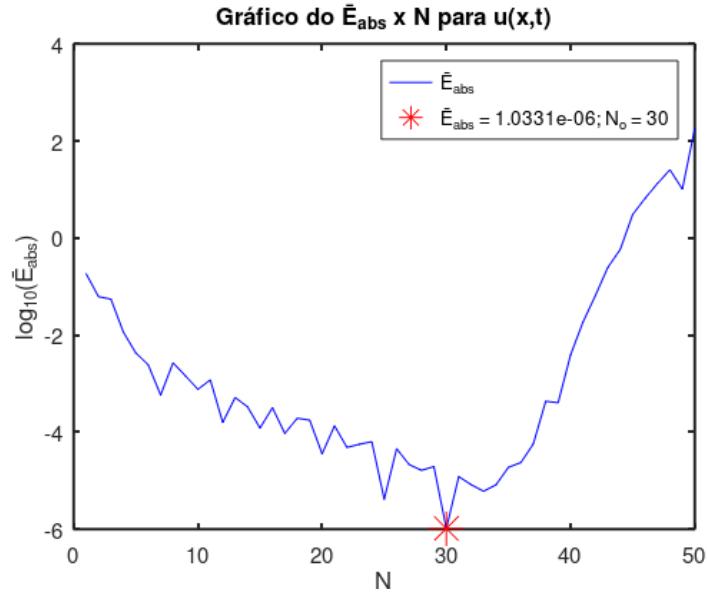


Figura 3. Erro Absoluto Médio e N_o para $t = 0,5$. Fonte: O autor.

Tabela 1. Solução analítica e Numérica para $t = 0,005$. Fonte: o autor.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,682709732	0,954477537	0,997306169	0,999950376	0,999976695
Solução numérica	0,682742007	0,954542066	0,997271535	0,999826448	0,999853766

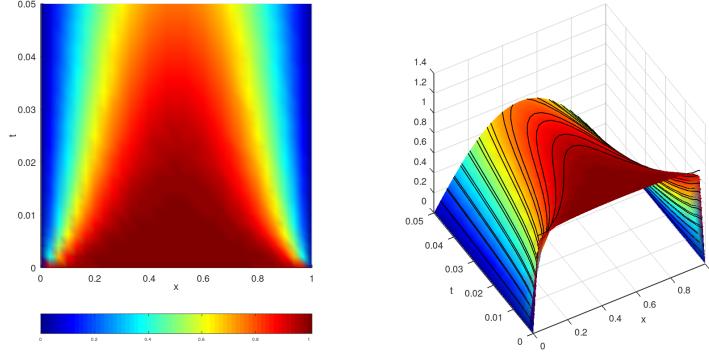
Tabela 2. Solução analítica e Numérica para $t = 0,05$. Fonte: o autor.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,244248060	0,461646521	0,630401071	0,736327185	0,772311606
Solução numérica	0,244250210	0,461640593	0,630392283	0,736316791	0,772300681

Tabela 3. Solução analítica e Numérica para $t = 0,5$. Fonte: o autor.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Solução analítica	0,002829665	0,005382343	0,007408160	0,008708815	0,009156990
Solução numérica	0,002829513	0,005379344	0,007410235	0,008708707	0,009156292

Na Figura 4, pode-se observar graficamente a solução da EDPP por meio do método de Weeks, utilizando-se $N_o = 35$, $0 \leq t \leq 0.05$ e $M = 30$.

**Figura 4.** Perfil da solução numérica pelo método de Weeks. Fonte: O autor.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, avaliou-se o método de Weeks como uma alternativa para a inversão numérica da Transformada de Laplace quando aplicada na obtenção da solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica. No processo, o cálculo do Erro Absoluto Médio foi utilizado como forma de determinar o valor do N (responsável pelo truncamento do número de termos da série) que deve ser usado para proporcionar o melhor ajuste dos perfis numéricos em relação aos analíticos. A este, deu-se o nome de N ótimo (N_o).

Para cada um dos valores de t escolhidos, o valor de N_o foi obtido por varredura. Observando os resultados, constatou-se que à medida que t aumenta, N_o também é alterado. E que, dependendo do valor de t , a ordem dos Erros Absolutos Médios tem uma sensível variação (ficando na faixa de 10^{-5} a 10^{-6}). Vale destacar que o algoritmo de Weeks implementado foi capaz, de forma geral, de fornecer bons resultados, muito próximos aos obtidos analiticamente, a um custo computacional extremamente baixo.

Como proposta de continuidade, sugere-se o estudo de novos métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace, baseados em outras expansões polinomiais e, ainda, particularmente, utilizar o método da Quadratura Gaussiana para a obtenção da solução de uma Equação Diferencial Parcial Parabólica.

REFERÊNCIAS

- [1] G. C. M. d. Amaral, “Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, 2016.
- [2] G. R. L. Calixto, E. K. Freitas, J. A. Ferreira, B. D. d. A. Rodriguez e J. F. Prolo Filho, “Influência do Parâmetro N no Algoritmo de Talbot-Fixo para a Inversão Numérica da Transformada de Laplace”, *Vetor*, v. 32, n. 1, pp. 42–51, 2022.
- [3] R. V. Churchill, *Operational Mathematics*. Estados Unidos: McGraw-Hill, 1977, vol. 2.
- [4] A. M. Cohen, *Numerical Methods For Laplace Transform Inversion*. Nova York: Springer Science+Business Media, LLC, 2007, vol. 5.
- [5] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*. Oxford: Prentice Hall, 1975.
- [6] K. E. Galdino, “Transformada Inversa de Laplace: Inversão Algébrica via Tabela e Inversão Numérica”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba - Campus I, 1995.
- [7] M. Heydarian, N. Mullineux e J. R. Reed, “Solution of parabolic partial differential equations”, *Appl. Math. Modelling*, v. 5, pp. 448–449, 1981.
- [8] C. F. Lemos, L. D. P. Fernandez e C. P. d. Costa, “Análise de Precisão de Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace Aplicado em um PVIC”, *Anais do congresso de iniciação científica UFPEL*, v. Único, pp. 1–4, 2023.
- [9] G. S. Lima e J. d. P. Araújo, “Um estudo das variações da temperatura do solo via equação do calor”, *Revista Brasileira de ensino de Física*, v. 41, pp. 1–7, 2019.
- [10] A. L. S. Pacheco, “Transformada de Laplace: algumas aplicações”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- [11] M. C. Paz, R. d. A. Schmidt, E. K. Freitas, B. D. d. A. Rodriguez e J. F. Prolo Filho, “Aspectos Computacionais Da Inversão Numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de engenharia elétrica”, *Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul*, v. Único, pp. 1–8, 2023.
- [12] C. Pilatti, “Análise Comparativa do Desempenho Numérico de Técnicas de Inversão da Transformada de Laplace aplicados a um problema de transporte de soluto em meio poroso”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, 2019.
- [13] J. R. da Silva, B. D. d. A. Rodriguez e J. F. Prolo Filho, “Análise de Desempenho do Método de Weeks na Inversão Numérica da Transformada de Laplace envolvendo Funções Elementares”, *Anais da 10ª Conferência Sul em Modelagem Computacional*, v. Único, pp. 1–11, 2025.
- [14] M. R. Spiegel e J. Liu, *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, 2^a ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- [15] I. Tani, “History of Boundary Layer Theory”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, v. 9, pp. 87–111, 1977.
- [16] Q. Wang e H. Zhan, “On different numerical inverse Laplace methods for solute transport problems”, *Advances in Water Resources*, v. 75, pp. 80–92, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.11.001>.
- [17] W. T. Weeks, “Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions”, *Journal of the Association for Computing Machinery*, v. 13, n. 3, pp. 419–429, 1966.
- [18] D. G. Zill e M. R. Cullen, *Equações Diferenciais*. São Paulo: Pearson, 2001, vol. 1.