

O Método Talbot-Fixo e as Regras do Trapézio e do Ponto Médio Aplicados na Aproximação de um Conjunto de Funções

Marcela S. da Silveira¹, Bárbara D. do A. Rodriguez², João F. Prolo Filho³

¹Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, silveiramarcela519@gmail.com

²Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, barbararodriguez@furg.br

³Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, joaoprolo@furg.br

Resumo. Neste artigo são explorados os aspectos computacionais do método Talbot-Fixo (baseado na técnica de deformação do contorno de Bromwich) associados às regras do trapézio e do ponto médio, para a inversão numérica da Transformada de Laplace. No processo, foram selecionadas e invertidas numericamente um conjunto de funções, cuja Transformada de Laplace inversa, $f(t)$, envolve a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou a Função de Heaviside. Os perfis de solução obtidos por meio da inversão numérica foram comparados com os gerados analiticamente, a fim de verificar a precisão e eficácia dos métodos utilizados. Para a avaliação da performance dos algoritmos foi utilizada a métrica do Erro Absoluto Médio, com o objetivo de estimar o número de termos necessários no somatório, chamado N ótimo (N_o), a fim de se obter o resultado que melhor ajusta o perfil numérico ao analítico de solução. Os dados obtidos indicaram que o método Talbot-Fixo não é apropriado para a inversão de funções, cuja Transformada de Laplace inversa resulte na Função de Heaviside.

Palavras-chave. Transformada de Laplace; Inversão Numérica; Talbot-Fixo; Regra do Trapézio; Regra do Ponto Médio.

1. INTRODUÇÃO

A Transformada de Laplace é uma importante ferramenta matemática devido a sua capacidade de converter equações diferenciais, sejam elas parciais (EDP's) ou ordinárias (EDO's), em equações mais simples de se resolver. Parte desse sucesso está relacionado com as suas propriedades, tais como, a linearidade, o tratamento das derivadas e a incorporação das condições iniciais, fazendo com que esse método seja amplamente aplicado na resolução de problemas em diversas áreas da engenharia e das ciências aplicadas [4], [8], [9], [10]. Resolver equações diferenciais que modelam, por exemplo, fenômenos físicos de difusão, de condução de calor ou de transporte de soluto, utilizando a Transformada de Laplace, por vezes, nos leva a lidar com soluções, cujas expressões envolvem a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou a Função de Heaviside [5]. Nestes casos, combinar a Transformada de Laplace com métodos numéricos de inversão é imprescindível, principalmente pela dificuldade em se obter transformadas inversas de forma analítica. Nesse sentido, diante do desafio de melhorar a eficácia em lidar com expressões cada vez mais complexas, surge a necessidade de explorar o desempenho numérico de diferentes técnicas de inversão como, por exemplo, aquelas que utilizam a deformação do contorno de integração de Bromwich [1], [4], [9], [11]. Essa abordagem requer o emprego de métodos numéricos de integração a fim de aproximar a integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno. Para isso, sugere-se como possibilidades de tratamento as regras do trapézio [1] e do ponto médio [6]. Dentro deste contexto, este

artigo apresenta a avaliação dos aspectos computacionais do método Talbot-Fixo para a inversão numérica da Transformada de Laplace, utilizando as regras do trapézio (que é o habitual) e do ponto médio, quando aplicados a um grupo de funções, cuja transformada inversa, $f(t)$, é expressa em termos da Função de Bessel, da Função Erro Complementar ou da Função de Heaviside.

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2 descreve-se a fundamentação teórica do Método Talbot-Fixo, incluindo a aplicação das duas regras numéricas de integração. Na Seção 3, apresentam-se os resultados obtidos. E, por fim, na Seção 4, faz-se as devidas considerações do que se obteve nesse estudo.

2. MÉTODO TALBOT-FIXO

Segundo Cohen [3], o método proposto por Talbot [11] tem como princípio fundamental a avaliação da integral complexa de inversão e a deformação do contorno de Bromwich. Portanto, avalia-se a integral dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} F(s)e^{st}ds, \quad (1)$$

onde o contorno β é uma linha vertical definida por $s = c + i\omega$, com $\omega \in (-\infty, +\infty)$, c tem um valor fixo escolhido de tal maneira que todas as singularidades da transformação estejam à esquerda da reta $s = c$ paralela ao eixo imaginário. Talbot [11] começa e termina no semiplano esquerdo, de modo que $s = c$, se aproxima do infinito negativo em cada extremidade. Essa substituição será viável se a transformada $F(s)$ satisfizer as seguintes condições, conforme indicado por Murli e Rizzardi [7]:

(i) Todas as singularidades s_i devem ser conhecidas, tais que $|Im(s_i)| < \gamma$, onde γ é um número conhecido.

(ii) $|F(s)|$ tende a zero uniformemente, quando $|s|$ tende a infinito em $\Re(s) < \gamma$.

Entretanto, a dificuldade ocorre na validação da condição (i) para uma função $F(s)$ em um novo contorno β' . Contudo, segundo Cohen [3], essa complicação pode ser superada ao se utilizar a função modificada $F(\lambda s + \sigma)$. Isso é possível mediante uma escolha apropriada dos parâmetros λ e do deslocamento σ , de modo que se $F(s)$ apresenta uma singularidade s_0 , a função $F(\lambda s + \sigma)$ terá uma singularidade correspondente s_0^* tal que

$$s_0^* = \frac{s_0 - \sigma}{\lambda}. \quad (2)$$

Dessa forma, a Equação (1) pode, então, ser substituída por

$$f(t) = \frac{\lambda e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{\beta'} F(\lambda s + \sigma)e^{\lambda st}ds, t > 0. \quad (3)$$

A fim de que as singularidades de $F(s)$ não sejam cruzadas pela deformação do contorno de Bromwich, para mapear as singularidades s_i , é estabelecido no método Talbot [11] uma função de varredura da região do novo contorno, definindo,

$$s(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}} + z \frac{v - 1}{2}, \quad (4)$$

onde v é um parâmetro arbitrário e $z \in (-2\pi i, 2\pi i)$.

Abate e Valkó [1] embasaram-se nessa premissa para definir uma parametrização do contorno de Talbot-Fixo. Assim reescreve-se a Equação (4) como:

$$s(\theta) = r\theta(\cot(\theta) + i), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (5)$$

onde r é um parâmetro fixo apropriado.

Substituindo a Equação (5) na Equação (1), a integral complexa de inversão pode ser escrita, em termos de θ , como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ts(\theta)} F(s(\theta)) s'(\theta) d\theta. \quad (6)$$

O termo $s'(\theta)$ expressa a derivada da Equação (5) em relação à θ e é dado por [1]

$$s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta)), \quad (7)$$

onde

$$\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot(\theta) - 1) \cot(\theta). \quad (8)$$

Neste trabalho, propõe-se a aproximação da integral na Equação (6) por dois métodos: a regra do trapézio e a regra do ponto médio.

2.1. Regra do Trapézio

A regra do trapézio é uma técnica de integração numérica na qual a área da região sob uma curva, descrita pela integral definida, é aproximada pela área de um trapézio (ou pela área de um conjunto de trapézios quando trata-se da regra composta). Segundo Abate e Valkó (2004), a versão composta da regra do trapézio na integral da Equação (6), para um passo de tamanho $\frac{\pi}{N}$ e pontos de avaliação $\theta_k = \frac{k\pi}{N}$, resulta na formulação geral para obtenção da aproximação da transformação inversa escrita como

$$f_T(t, N) \approx \frac{r}{N} \left\{ \frac{1}{2} F(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{N-1} \Re [e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}. \quad (9)$$

2.2. Regra do Ponto Médio

A regra do ponto médio, conforme detalhada por Lin (2003), também é uma técnica de integração numérica onde, dado um conjunto de subintervalos, a integral é aproximada pela soma dos valores resultantes da avaliação da função no ponto médio de cada subintervalo multiplicados pelo tamanho desses subintervalos. De forma equivalente, quando aplicada na Equação (6) para a aproximação da integral, com o espaçamento definido por $\theta_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N}$, a expressão resultante é dada por

$$f_{PM}(t, N) \approx \frac{r}{N} \sum_{k=1}^N \Re \left[e^{ts(\theta_k)} F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k)) \right]. \quad (10)$$

3. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos utilizando-se o Método Talbot-Fixo associados às regras do trapézio e do ponto médio para a aproximação da integral descrita na Equação (6). Os algoritmos computacionais foram implementados no software livre Octave, versão 8.4, em uma máquina com o sistema operacional Ubuntu, versão 22.04 LTS. Para a realização dos testes e análise dos métodos, foram escolhidas funções ($F(s)$), cujas inversas ($f(t)$) envolvem a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou a Função de Heaviside, apresentadas na Tabela 1, com a sendo uma constante real, igual a 0,5 [4].

Tabela 1. Transformada de Laplace para funções especiais. Fonte: do autor.

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{1}{\sqrt{(s^2+a^2)}}$	$f_1(t) = J_0(at)$
$F_2(s) = \frac{s}{\sqrt{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}$	$f_2(t) = tJ_0(at)$
$F_3(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$f_3(t) = \text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$F_4(s) = \frac{e^{-as}}{s}$	$f_4(t) = U(t-a)$

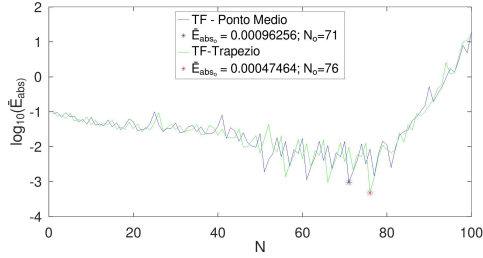
A análise da eficiência dos métodos numéricos foi realizada através da obtenção do melhor N (indicado como N_o), o qual foi determinado dentro do intervalo de $1 \leq N \leq 100$, utilizando como critério de escolha o valor do Erro Absoluto Médio. O perfil do Erro Absoluto Médio, denotado por \overline{E}_{abs} , foi analisado utilizando-se uma adaptação da fórmula proposta por Calixto et al. [2], que neste trabalho está definida como

$$\overline{E}_{abs} = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} E_{abs}(f(t_i)), \quad (11)$$

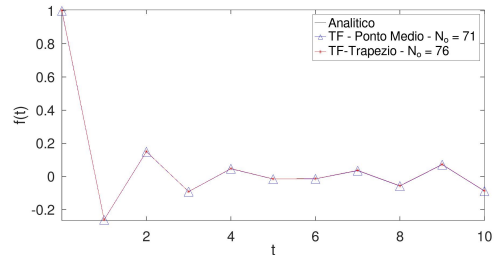
onde E_{abs} é o Erro Absoluto calculado para cada f e N_t é o número de pontos do vetor t .

3.1. Inversão de $F_1(s)$

A Figura 1 mostra os testes para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_1(s) = \frac{1}{\sqrt{(s^2+a^2)}}$. O perfil do Erro Absoluto Médio está representado na Figura 1a. A Figura 1b apresenta uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numérico para $F_1(s)$.



(a) \overline{E}_{abs} para a inversão de $F_1(s)$.

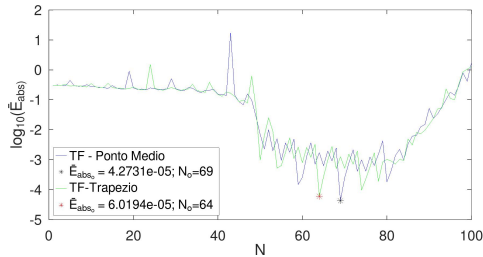


(b) Perfis analítico e numérico para $F_1(s)$.

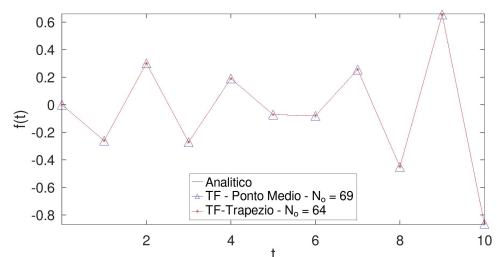
Figura 1. Resultados para a inversão de $F_1(s)$. Fonte: do autor.

3.2. Inversão $F_2(s)$

A Figura 2 ilustra os resultados alcançados na inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_2(s) = \frac{s}{\sqrt{(s^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}}$. A Figura 2a exibe o perfil do Erro Absoluto Médio, enquanto que a Figura 2b traz uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numérico para $F_2(s)$.



(a) \overline{E}_{abs} para a inversão de $F_2(s)$.

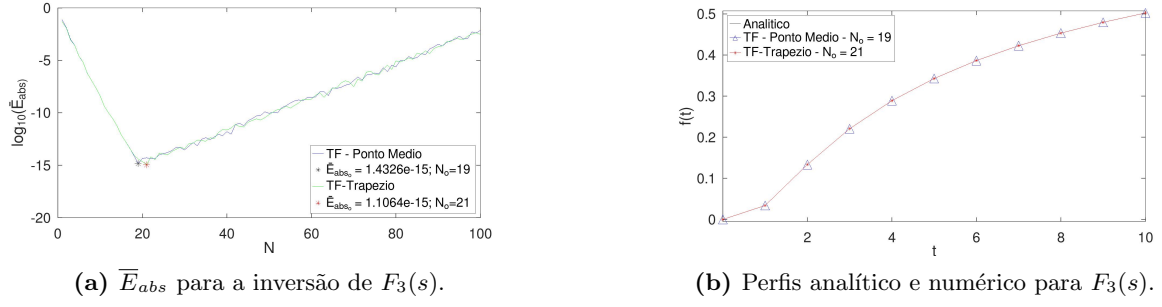


(b) Perfis analítico e numérico para $F_2(s)$.

Figura 2. Resultados para a inversão de $F_2(s)$. Fonte: do autor.

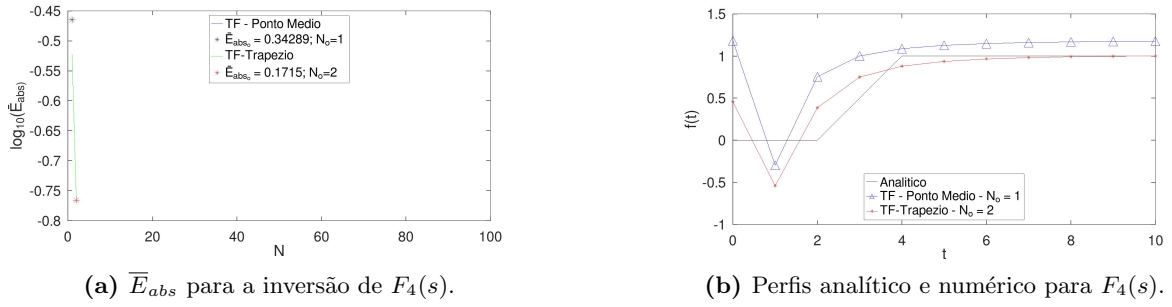
3.3. Inversão de $F_3(s)$

A Figura 3 mostra os testes realizados para a inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_3(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$. O perfil do Erro Absoluto Médio é mostrado na Figura 3a. Já a Figura 3b exibe uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numérico para $F_3(s)$.

**Figura 3.** Resultados para a inversão de $F_3(s)$. Fonte: do autor.

3.4. Inversão de $F_4(s)$

A Figura 4 apresenta os dados obtidos a partir da inversão numérica da Transformada de Laplace para a função $F_4(s) = \frac{e^{-as}}{s}$. Na Figura 4a está representado o perfil do Erro Absoluto Médio e a Figura 4b faz uma comparação gráfica entre os perfis analítico e numérico para $F_4(s)$.

**Figura 4.** Resultados para a inversão de $F_4(s)$. Fonte: do autor.

A Tabela 2 apresenta os valores do parâmetro N_o e da ordem dos Erros Absolutos Médios obtidos para as diferentes funções ($F_1(s)$ à $F_4(s)$) utilizando-se o método Talbot-Fixo associado às regras do trapézio (Talbot-Fixo Trapézio) e do ponto médio (Talbot-Fixo Ponto Médio).

Tabela 2. N_o e \overline{E}_{abs} obtidos para cada uma das funções para $a = 0,5$. Fonte: do autor.

Métodos	Função	N_o	\overline{E}_{abs} (ordem)
Talbot-Fixo Trapézio	$F_1(s)$	76	10^{-4}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_1(s)$	71	10^{-4}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_2(s)$	64	10^{-5}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_2(s)$	69	10^{-5}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_3(s)$	21	10^{-15}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_3(s)$	19	10^{-15}
Talbot-Fixo Trapézio	$F_4(s)$	2	10^{-1}
Talbot-Fixo Ponto Médio	$F_4(s)$	1	10^{-1}

4. CONCLUSÕES

Nesse trabalho, foi realizada a avaliação do método Talbot-Fixo para a inversão numérica da Transformada de Laplace, utilizando-se as regras do trapézio e do ponto médio para a aproximação da integral de Bromwich resultante da deformação e truncamento do contorno. Tais métodos foram aplicados a um conjunto de funções, cuja Transformada de Laplace Inversa envolve a Função de Bessel, a Função Erro Complementar ou a Função de Heaviside. Para a avaliação da performance dos métodos foi utilizada a métrica do Erro Absoluto Médio.

Em linhas gerais, para cada função testada, a mudança do método de integração não trouxe melhorias importantes na qualidade dos resultados, visto que a ordem do erro obtida foi a mesma. Com relação ao valor do N_o , o método Talbot-Fixo associado a regra do ponto médio mostrou-se ligeiramente melhor em três das funções testadas, porém não ao ponto de influenciar significativamente no esforço computacional.

Individualmente, em termos do Erro Absoluto Médio, o método Talbot-Fixo (independente do esquema de integração) mostrou a sua melhor performance lidando com a Função Erro Complementar ($F_3(s)$) e a pior, no tratamento da Função de Heaviside ($F_4(s)$). Nas simulações envolvendo a Função de Bessel ($F_1(s)$ e $F_2(s)$), o método numérico teve um bom desempenho, fornecendo perfis comparáveis com os obtidos analiticamente a uma ordem de erro entre 10^{-4} e 10^{-5} . Chama-se a atenção também para o baixo esforço computacional do método Talbot-Fixo (independente do esquema de integração) em virtude de que, para um computador com configurações como as descritas anteriormente, foi capaz de gerar perfis de resultados em poucos segundos.

Como proposta de continuidade, sugere-se estudar algoritmos para a inversão de funções do tipo $F_4(s)$ e explorar o emprego de outros métodos de aproximação para a integral de Bromwich, resultante da deformação e truncamento do contorno.

AGRADECIMENTOS

À CAPES pelo apoio financeiro neste estudo.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Abate e P. P. Valkó, “Multi-precision Laplace Transform inversion”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 60, n. 2, R979–R993, 2004.
- [2] G. R. L. Calixto, E. K. Freitas, J. A. Ferreira, B. D. do Amaral Rodriguez e J. F. Prolo Filho, “Parameter N Influence on the Fixed-Talbot Algorithm for the Laplace Transform Numerical Inversion”, *VETOR – Revista de Ciências Exatas e Engenharias*, v. 32, n. 1, pp. 42–51, 2022.
- [3] A. M. Cohen, *Numerical methods for Laplace Transform inversion*, 5^a ed. New York: Springer Science, 2007.

- [4] E. K. Freitas, “Algoritmos de Inversão Numérica da Transformada de Laplace Aplicados à Solução de um Problema de Difusão de Mercúrio na Água”, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande, 2022.
- [5] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10^a ed. New Jersey: John Wiley, 2011.
- [6] F. F. Lin, “Numerical Inversion of Laplace Transforms by the Trapezoidal-Type Methods”, Programa of Philosophy in Mathematics, Dissertação de Doutorado, Oregon State University, 2003.
- [7] A. Murli e M. Rizzardi, “Algorithm 682: Talbot’s method of the Laplace inversion problems”, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, v. 16, n. 2, pp. 158–168, 1990.
- [8] A. L. S. Pacheco, “Transformada de Laplace: algumas aplicações”, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Monografia de Especialização, Universidade Federal de Santa Catarina, 2011.
- [9] M. C. Paz, R. A. Schmidt, E. K. Freitas, B. D. A. Rofriguez e J. F. Prolo Filho, “Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de engenharia elétrica”, *Anais do Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul*, 2023. endereço: <https://www.even3.com.br/anais/xiermacrs/625203-aspectos-computacionais-da-inversao-numerica-da-transformada-de-laplace-aplicada-a-um-problema-de-engenharia-elet>.
- [10] M. S. da Silveira, M. da Cunha Paz, B. D. do Amaral Rodriguez e J. F. Prolo Filho, “O Método Talbot-Fixo e as Regras do Trapézio e do Ponto Médio Aplicados na Obtenção da Solução de Um Problema de Difusão de Mercúrio”, *Anais da 10^a Conferência Sul em Modelagem Computacional (10^o MCSul) e X Seminário e Workshop em Engenharia Oceânica (X SEMENGO) do Rio Grande(RS)*, 2024. endereço: <https://www.even3.com.br/anais/10-mcsul-x-semengo-435016/996221-o-metodo-talbot-fixo-e-as-regras-do-trapezio-e-do-ponto-medio-aplicados-na-obtencao-da-solucao-de-um-problema-de/>.
- [11] A. Talbot, “The accurate numerical inversion of Laplace Transforms”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 23, n. 1, pp. 97–120, 1979.