

Resolução de um Problema de Condução de Calor em Materiais Compostos por Transformada de Laplace

Luis G. S. Miranda¹, João F. Prolo Filho², Bárbara D. A. Rodriguez³

¹Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, Universidade Federal do Rio Grande, luis.miranda10@icloud.com

²Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, Universidade Federal do Rio Grande, joaoprolo@furg.br

³Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF, Universidade Federal do Rio Grande, barbararodriguez@furg.br

A Transformada de Laplace (TL) tem ampla aplicação na resolução de equações diferenciais, sejam parciais (EDP's) ou ordinárias (EDO's), pois permite transformar as equações no domínio do tempo em equações mais simples no domínio da frequência [1]. Apesar da transformada inversa associada ser usualmente de difícil obtenção, existem diversos métodos numéricos dedicados a este fim, como por exemplo, o método Stehfest [2]. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é apresentar uma forma de utilizar a Transformada de Laplace, associada ao método Stehfest de inversão, para o tratamento de um problema de condução de calor em um meio composto em camadas.

Considerando o problema descrito por Wanzeller et. al. [3], baseado na equação unidimensional da condução de calor para um meio composto por dois materiais de distintas características físicas, para $x \in [a, b]$, expressa como:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = 0 \quad , a \leq x \leq 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = 0 \quad , 0 < x \leq b, \quad t > 0, \quad (2)$$

onde $u_i(x, t)$ e k_i representam a função temperatura e a difusividade térmica do material na região $i = (1, 2)$. Admite-se ainda as condições de contorno e condições iniciais:

$$K_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = K_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}; \quad u_1(0, t) = u_2(0, t); \quad u_1(a, t) = U_1; \quad u_2(b, t) = U_2, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = U_0, \quad t = 0, \quad x \in (a, b), \quad (4)$$

onde K_i e U_i representam a condutividade térmica e a temperatura na respectiva camada $i = (1, 2)$ e U_0 é a temperatura inicial.

Aplicando a Transformada de Laplace nas Equações (1) e (2), e utilizando as condições iniciais dadas pela Equação (4), tem-se para cada região i :

$$\frac{d^2 \bar{u}_i(x)}{dx^2} - q_i^2 \bar{u}_i(x) = -\frac{U_0}{\kappa_i}, \quad i = (1, 2), \quad (5)$$

onde $q_i = \sqrt{\frac{s}{\kappa_i}}$ e $\bar{u}_i(x) = \bar{u}_i(x, s) = \mathcal{L}\{u_i(x, t)\}$, sujeitas as versões transformadas das condições de contorno dadas pela Equação (3):

$$K_1 \frac{d\bar{u}_1(0)}{dx} = K_2 \frac{d\bar{u}_2(0)}{dx}; \quad \bar{u}_1(0) = \bar{u}_2(0); \quad \bar{u}_1(a) = \frac{U_1}{s}; \quad \bar{u}_2(b) = \frac{U_2}{s}. \quad (6)$$

A Equação (5) representa uma equação diferencial linear não homogênea, cuja solução é expressa como:

$$\bar{u}_i(x) = A_i e^{q_i x} + B_i e^{-q_i x} + \frac{U_0}{q_i^2 k_i}, \quad i = (1, 2). \quad (7)$$

Sujeitando a Equação (7) às condições de contorno (Equação (6)), chega-se no sistema:

$$\begin{cases} K_1 q_1 (A_1 - B_1) = K_2 q_2 (A_2 - B_2) \\ A_1 + B_1 + \frac{U_0}{q_1^2 k_1} = A_2 + B_2 + \frac{U_0}{q_2^2 k_2} \\ A_1 e^{q_1 a} + B_1 e^{-q_1 a} + \frac{U_0}{q_1^2 k_1} = \frac{U_1}{s} \\ A_2 e^{q_2 b} + B_2 e^{-q_2 b} + \frac{U_0}{q_2^2 k_2} = \frac{U_2}{s} \end{cases}, \quad (8)$$

de onde são obtidos os coeficientes para escrever explicitamente as soluções na forma

$$\bar{u}_1(x) = A_1 [e^{q_1 x} - e^{q_1 (2a-x)}] + \frac{U_1}{s} e^{q_1 (a-x)} + \frac{U_0}{m} (1 - e^{q_1 (a-x)}) \quad (9)$$

e

$$\bar{u}_2(x) = A_2 [e^{q_2 x} - e^{q_2 (2b-x)}] + \frac{U_2}{s} e^{q_2 (b-x)} + \frac{U_0}{n} (1 - e^{q_2 (b-x)}), \quad (10)$$

onde $m = q_1^2 k_1$; $n = q_2^2 k_2$; $\alpha = 1 - e^{2q_1 a}$; $\beta = 1 + e^{2q_2 b}$; $\gamma = 1 - e^{2q_2 b}$; $\delta = 1 + e^{2q_1 a}$; $\epsilon = U_2 e^{q_2 b} - U_1 e^{q_1 a}$; $\zeta = K_2 q_2 U_2 e^{q_2 b} - K_1 q_1 U_1 e^{q_1 a}$; $\eta = 1 - e^{q_2 b}$; $\theta = 1 - e^{q_1 a}$; $\iota = n K_1 q_1 e^{q_1 a} - m K_2 q_2 e^{q_2 b}$. Ainda

$$A_1 = \frac{A_2 \gamma}{\alpha} + \frac{\epsilon}{s \alpha} + \frac{U_0 \eta}{n \alpha} - \frac{U_0 \theta}{m \alpha}, \quad (11)$$

$$A_2 = \frac{(\delta \epsilon m n K_1 q_1) + (U_0 \delta s K_1 q_1 (\eta m - \theta n)) + (\zeta \alpha m n) + (U_0 \alpha \iota s)}{(\alpha \beta K_2 q_2 s m n) - (\gamma \delta K_1 q_1 s m n)}. \quad (12)$$

Devido a inviabilidade de uma inversão analítica da Transformada de Laplace, a implementação de um método numérico foi necessária. O método Stehfest [2] foi a escolha onde, para cada i , tem-se $u_i(x, t) \approx \frac{\ln(2)}{t} \sum_{l=1}^N V_l \bar{u}_i \left(x, \frac{l \ln(2)}{t} \right)$, com $V_l =$

$(-1)^{(N/2+l)} \sum_{j=\lfloor (l+1)/2 \rfloor}^{\min(l, N/2)} \frac{j^{N/2} (2j)!}{(N/2-j)!(j)!(j-1)!(l-j)!(2j-l)!}$, e N representa o número de termos que se utilizará na série.

Este trabalho está em desenvolvimento e os resultados numéricos estão sendo gerados a partir de um código que está sendo implementado no software GNU Octave.

REFERÊNCIAS

- [1] M. R. Spiegel, *Transformada de Laplace*, 1^a ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.
- [2] H. Stehfest, “Algorithm 368: numerical inversion of Laplace transforms [D5]”, *Communications of the ACM*, v. 13, n. 1, pp. 47–49, 1970. DOI: 10.1145/361953.361969.
- [3] W. G. Wanzeller, C. A. F. D’Agnone, G. M. de Castro e C. Alves, “On the use of numerical inverse Laplace transform applied to heat conduction in multilayer materials”, *The International Journal of Engineering and Science*, v. 12, n. 1, pp. 47–52, 2023. DOI: 10.9790/1813-12014752.