

Trigonometria no círculo trigonométrico: experiências desenvolvidas no Ensino Médio

Trigonometry in the trigonometric circle: experiences developed in high school

Iasmim Martins Noro¹

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo relatar práticas de ensino relacionadas a trigonometria no círculo trigonométrico desenvolvidas com três turmas de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Reverendo Augusto Paes de Ávila, localizada na cidade de Praia Grande/SP e pertencente a Diretoria de Ensino de São Vicente. As ações foram pensadas com base no movimento lógico-histórico da trigonometria, especificamente no que se refere a origem dos conhecimentos trigonométricos por meio da navegação. As práticas são constituídas de um jogo e uma situação-problema que envolve a essência da trigonometria. Apresentar a história da trigonometria para os estudantes, mostrando o modo como os conceitos surgiram a partir de necessidades práticas, como a navegação, tornou o aprendizado mais significativo. Além disso, os resultados apontam que a mediação do professor é um elemento fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática, especialmente no ensino de trigonometria, que frequentemente apresenta desafios conceituais para os estudantes deste ciclo de escolarização.

Palavras-chave: Trigonometria. Círculo trigonométrico. Ensino médio. Movimento lógico-histórico

Abstract: This study aims to report teaching practices related to trigonometry in the trigonometric circle developed with three 2nd grade classes of high school students at the Reverendo Augusto Paes de Ávila State School, located in the city of Praia Grande/SP and belonging to the São Vicente Education Board. The actions were designed based on the logical-historical movement of trigonometry, specifically regarding the origin of trigonometric knowledge through navigation. The practices consist of a game and a problem situation that involves the essence of trigonometry. Presenting the history of trigonometry to students, showing how the concepts emerged from practical needs, such as navigation, made learning more meaningful. In addition, the results indicate that teacher mediation is a fundamental element in the process of teaching and learning mathematics, especially in the teaching of trigonometry, which often presents conceptual challenges for students in this school cycle.

Keywords: Trigonometry. Trigonometric circle. High school. Logical-historical movement

1 Introdução

O ensino de trigonometria no Ensino Médio é um componente crucial da formação matemática dos estudantes, pois estabelece a base para conhecimentos em ramos não apenas da matemática, mas também da física e engenharia. A forma como a trigonometria é ensinada pode variar significativamente, impactando o aprendizado e o interesse dos estudantes. Dado que se faz essencial oferecer aos estudantes situações que possibilitem a construção de conhecimentos históricos e culturais, frutos das necessidades sociais se faz necessário organizar um ensino que seja pautado nestes tópicos. Considerando que o aprendizado propicia

¹ Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho • Rio Claro, SP • ✉ iasmim.noro@unesp.br



conhecimentos novos, o trabalho do professor deve envolver a criação de um ambiente de aprendizado que estimule a curiosidade, investigação e a construção ativa do conhecimento por parte dos estudantes

A aprendizagem dota a pessoa de conhecimentos, hábitos e destrezas necessários para os distintos tipos de atividade socialmente útil. Forma também na pessoa a destreza para dirigir seus próprios processos psíquicos, de selecionar, organizar e dirigir suas ações e operações, hábitos e experiências em correspondência com a tarefa de resolver. De tal maneira que a aprendizagem prepara a pessoa para o trabalho. (Petrovski, 1980, p. 167)

Nesta perspectiva, a aprendizagem fornece as ferramentas necessárias para que o indivíduo possa participar ativamente da sociedade, realizando diferentes tipos de ações socialmente úteis, o que inclui a capacidade de selecionar informações relevantes, organizar o pensamento, planejar ações e tomar decisões. Assim, o professor desempenha um papel fundamental na promoção da aprendizagem, atuando como um facilitador que guia e estimula os estudantes a desenvolverem todo o seu potencial. Para contribuir efetivamente para a aprendizagem, o professor pode adotar diversas estratégias e práticas pedagógicas. É nesta perspectiva que será destacado nesta escrita algumas possibilidades de trabalho voltadas para o ensino dos conhecimentos trigonométricos. A partir de ações desenvolvidas, o objetivo deste trabalho é relatar práticas de ensino relacionadas a trigonometria no círculo trigonométrico desenvolvidas com três turmas de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Reverendo Augusto Paes de Ávila, localizada na cidade de Praia Grande/SP e pertencente a Diretoria de Ensino de São Vicente. Assim, será apresentado nos próximos itens aspectos relacionados as origens da trigonometria, a metodologia, as práticas de ensino desenvolvidas e as considerações finais acerca do desenvolvimento das experiências.

2 Origens da trigonometria

Assim como em outros ramos da matemática, a história da trigonometria está atrelada as necessidades humanas, principalmente a demandas práticas relacionadas a astronomia, agrimensura e a navegação. Os primeiros sinais de trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia, através do cálculo de proporções entre números e lados de triângulos semelhantes. Estas observações puderam ser identificadas no Papiro Rhind, também conhecido como Papiro Ahmes. Este é um documento egípcio datado de aproximadamente 1650 a.C. que contém 84 problemas matemáticos. Entre esses problemas, quatro deles fazem referência ao "seqt" de um ângulo (Costa, 2003). O "seqt" era uma medida utilizada pelos egípcios para descrever a



inclinação de uma reta ou de uma face de uma pirâmide, e pode ser considerado um precursor do conceito moderno de tangente. A presença do "seqt" no Papiro Rhind indica que os egípcios já possuíam algum conhecimento de relações trigonométricas, mesmo que de forma rudimentar.

Os principais conceitos trigonométricos que hoje adotamos em aplicações práticas voltadas a agrimensura foram criados pelos egípcios, e são relacionados as técnicas de medição e cálculo de áreas com base nas relações entre os lados de um triângulo. Já na astronomia, foram os povos babilônios que desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal ainda utilizado para medir ângulos e tempo. Ainda, estes se destacaram-se como astrônomos também por suas habilidades oriundas de crenças religiosas e pela necessidade de organizar o calendário agrícola em razão de previsões das épocas de plantio, exercendo significativa influência sobre as civilizações posteriores. No século 28 a.C, eles criaram um calendário astrológico. A partir de 747 a.C., elaboraram tábuas de eclipses lunares, registros que chegaram aos nossos dias (Smith, 1958).

Ainda, desde suas origens, a trigonometria desempenhou um importante papel no desenvolvimento de técnicas e artefatos que possibilitaram aos navegadores explorarem com segurança e precisão o oceano. Em assim sendo, o desenvolvimento de conceitos abstratos como os trigonométricos podem moldar nossa compreensão do mundo, bem como oportunizar o surgimento e a evolução de outros conhecimentos matemáticos, como a análise e a álgebra. Sendo a medição de ângulos considerada como um conceito fundamental para o desenvolvimento da trigonometria e suas aplicações práticas, há evidências históricas que revelam que a necessidade de medir ângulos surgiu cedo na história da humanidade, no qual os astrolábios primitivos foram utilizados para esse fim (Smith, 1958).

Com os gregos a trigonometria atingiu um novo nível de sofisticação, pois eles a transformaram em um ramo teórico da matemática. O grego Hiparco de Niceia (190 a.C – 125 a.C) é considerado o “pai da trigonometria”. Ele foi um astrônomo e matemático que fez grandes contribuições para a trigonometria e a astronomia. Hiparco desenvolveu as primeiras conhecidas tabelas trigonométricas, o que permitiu cálculos anexos e distâncias com mais soluções. Além disso, aperfeiçoou a teoria dos movimentos da Terra e da Lua ao inventar um modelo mais preciso para prever eclipses com até 600 anos de antecedência, bem como o primeiro feito acerca de um catálogo de estrelas. Em assim sendo, o conhecimento trigonométrico não surge de uma vez só, mas sim faz parte de um processo de desenvolvimento que foi gradualmente aprimorado, refinado e expandido ao longo dos séculos por diversas civilizações. Portanto, ao longo da história, a trigonometria tornou-se essencial para diversas



ciências e tecnologias, desde a cartografia, engenharia, física, astronomia, navegação, computação gráfica, dentre outros.

3 Metodologia

Ao reconhecer as dificuldades matemáticas dos estudantes em conteúdos trigonométricos desenvolvidos ao longo das aulas de matemática, bem como identificar que muitas vezes a resolução das atividades se dava de modo mecânico, a professora da disciplina e autora deste trabalho, planejou e organizou duas ações que pudessem desencadear uma aprendizagem interativa significativa com as turmas. Neste intuito, o trabalho aqui mencionado é proveniente de duas práticas de ensino relacionadas a trigonometria no círculo trigonométrico desenvolvidas com três turmas de 2º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Reverendo Augusto Paes de Ávila, localizada na cidade de Praia Grande/SP e pertencente a Diretoria de Ensino de São Vicente.

As ações foram pensadas com base no movimento lógico-histórico da trigonometria, especificamente no que se refere a origem dos conhecimentos trigonométricos por meio da navegação. Para Kopnin (1978), o movimento lógico-histórico é uma forma de compreender o desenvolvimento do conhecimento científico e teórico a partir de duas dimensões interligadas: a lógica interna dos conceitos e o processo histórico concreto de sua construção. Como foi possível perceber na escrita sobre os princípios da trigonometria, esta possui relação com atividades práticas voltadas a astronomia, agrimensura e navegação. Em razão de a escola e os estudantes serem moradores de uma cidade de praia, desenvolver situações em que envolvesse a navegação seria um modo interessante de introduzir os novos conhecimentos trigonométricos. Deste modo, as práticas de ensino aqui relatadas foram desenvolvidas em fevereiro e março do ano de 2025, e contaram com o jogo pedagógico como um importante aliado no ensino (Lanner de Moura e Moura, 1997) e uma situação-problema que envolve a essência da trigonometria.

4 Prática de ensino: duas ações pautadas na trigonometria no círculo trigonométrico

Neste tópico serão apresentadas duas práticas de ensino pautadas em conhecimentos relacionados a “trigonometria no círculo trigonométrico”, no qual foram exploradas ideias relacionadas aos arcos, ângulos e arcos côngruos em uma circunferência.

Ação 1: Jogo Batalha Naval Trigonométrica

O jogo Batalha Naval Trigonométrica foi um recurso utilizado para trabalhar com os estudantes a localização de pontos e ângulos no círculo trigonométrico, cálculo mental

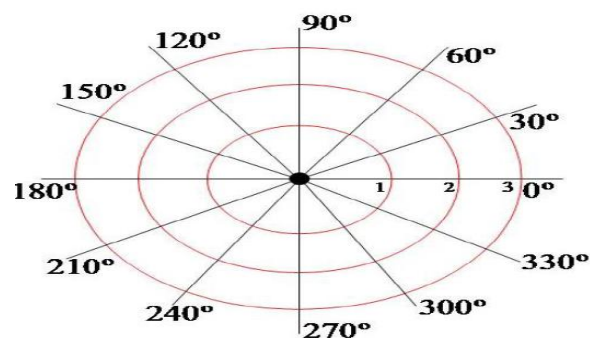


envolvendo ângulos notáveis, bem como a localização espacial de arcos côngruos. Pautado em uma adaptação do original jogo Batalha Naval que tem como objetivo destruir as embarcações inimigas, ocultas do adversário. A ideia do jogo realizado com as turmas foi encontrada no site do Grupo Mathema². No entanto, algumas orientações sobre o jogo foram adaptadas das encontradas no site em função do tempo de aula para o desenvolvimento. Os estudantes foram divididos em duplas e foi entregue um tabuleiro circular para cada um. Sem que o colega visse, cada jogador deveria posicionar no seu próprio tabuleiro uma esquadra composta por:

- 5 porta-aviões (5 marcas X em posições sucessivas numa reta ou na circunferência);
- 3 submarinos (3 marcas S em posições sucessivas numa reta ou na circunferência);
- 2 contratorpedeiros (2 marcas Δ em posições sucessivas numa reta ou na circunferência);
- 1 fragata (1 marca F);

Dado que a posição e a orientação das embarcações eram definidas secretamente pelos estudantes antes do início da partida, no momento do jogo eles teriam que adivinhar onde o colega havia colocado suas embarcações. A dupla escolhendo de acordo com seus critérios quem iria começar o jogo, alternadamente cada um indicava uma posição em que esperava encontrar as embarcações do colega. A indicação da posição era dada do seguinte modo: primeiro o raio da circunferência e depois o ângulo, como por exemplo: (2, 30°). Se o colega acertasse a posição de um dos navios do adversário, o colega marcava em seu tabuleiro qual posição havia sido desvendada e especificava o tipo de navio. Mesmo que o colega acertasse ou errasse, cada um teria o direito de jogar uma vez e passar a jogada para o adversário. O jogo terminaria quando uma das frotas, ou seja, todas as marcas de determinada embarcação fossem totalmente atingidas.

Figura 1: Modelo do tabuleiro utilizado pelos estudantes no jogo



² <https://mathema.com.br/jogos-e-atividades/batalha-naval-circular/>



Fonte: Tabuleiro retirado de um site internet³

Antes de iniciar com as ações aqui relatadas, foram apresentadas as turmas algumas noções acerca da origem da trigonometria, destacando a importância da navegação nesse movimento de constituição e aprimoramento dos conceitos trigonométricos. Os estudantes demonstraram estar interessados em realizar o jogo e logo na apresentação dele mencionaram que já haviam jogado o jogo Batalha Naval, mas que este ainda não conheciam. Outro aspecto perceptível nas três turmas foi a estranheza inicial em estarem realizando um jogo na aula de matemática, inclusive o questionamento de uma estudante acerca de que se o que estava sendo desenvolvido era mesmo sobre matemática. As maiores dificuldades dos estudantes foram relacionadas ao entendimento das regras, pois durante a realização do mesmo não tiveram dificuldades no entendimento. Os estudantes, bem como seus registros, deram indícios de compreensão acerca da localização dos pontos e ângulos no círculo trigonométrico. O raciocínio lógico foi marcante na atividade no momento em que eles descobriam a localização de uma das navegações e conseguiam por meio da lógica expressa nas regras do jogo encontrar onde estavam os outros elementos das frotas. No entanto, quando questionados acerca de possíveis arcos côngruos no círculo trigonométrico do jogo, os estudantes tentaram descobrir apenas por meio da resolução de operações aritméticas que haviam memorizado para este tipo de situação. Foi a partir deste fato que pensei em propor outra situação que buscasse a essência da ideia do arco côngruo, o que decorre do “Problema do capitão”.

Ação 2: O problema do capitão

Esta ação foi pautada no movimento lógico-histórico da trigonometria, envolvendo uma situação-problema também referente a navegação. A ideia desta ação foi fazer com que os estudantes pensassem em um modo de posicionar os pontos de acordo com o ângulo proposto pela atividade, bem como encontrar o arco côngruo na circunferência. Esta ação foi planejada pela professora depois de perceber que os estudantes estavam encontrando o arco côngruo em outras atividades de forma mecânica e apenas com base nas operações aritméticas, não identificando este no círculo trigonométrico a partir de sua definição.

³ <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/batalha-naval-no-circulo-trigonometrico.htm>



Quadro 1: O problema do capitão

O Capitão Antônio Carlos está navegando com seu navio cargueiro “Coração do Mar” pelo arquipélago de Ilhas Douradas. Ele precisa entregar uma carga valiosa na Ilha Esmeralda, mas a rota direta está bloqueada por um campo de corais perigoso. Para contornar o obstáculo, ele decide usar a posição de três faróis como referência para determinar uma rota segura.

Informações:

- **Farol A:** Localizado na Ilha Âmbar, em um ponto de referência conhecido.
- **Farol B:** Localizado na Ilha Berilo, também em um ponto de referência conhecido.
- **Farol C:** Localizado na Ilha Coral, marcando o início do campo de corais perigoso.
- **Ângulos:** O capitão Antônio Carlos sabe que o ângulo formado entre os Faróis A e B, a partir de seu navio, é de 60 graus. Ele também sabe que o ângulo formado entre os Faróis B e C, a partir de seu navio, é de 120 graus.

Pergunta: Para chegar ao seu destino o capitão pediu ao seu tripulante que descobrisse qual o arco côngruo de cada um dos ângulos. Porém, o tripulante não domina as operações matemáticas por meio do algoritmo e também não possui calculadora. Como ele pode descobrir o arco côngruo apenas observando o círculo trigonométrico?

Fonte: Autora

Nesta situação os estudantes de todas as turmas demonstraram ter dificuldades em solucionar o problema. Foi lido com os estudantes no coletivo e algumas ideias foram por mim lançadas, no entanto, a maior dificuldade encontrada por eles foi em interpretar as informações. Os estudantes não sabiam onde poderiam colocar o cargueiro do capitão. Houveram os estudantes que conseguiram ter esta iniciativa, no entanto, quando demarcavam o ponto C não levavam em consideração que haviam que deixar um ângulo de 120° entre B e C, e sim colocavam o ponto C na posição do 120° no círculo trigonométrico. Para estes estudantes, mesmo eles estando com a dupla que realizaram o jogo, foi necessária muita mediação da professora para orientar os estudantes em busca da solução e sem dar a resposta pronta e acabada. Aqueles que conseguiram solucionar o problema sozinhos, pensaram ser melhor colocar o cargueiro na origem do círculo trigonométrico, o ponto A em direção ao ângulo de 0° e o ponto B em 60° . Estes compreenderam que precisavam andar 120° à partir do ponto B, o que para muitos foi a maior dificuldade da atividade, ou seja, na interpretação das informações.

Sobre o arco côngruo, os estudantes conseguiram descobrir ele sem realizar diretamente operações aritméticas ou lembrar de uma observação posta em aula anterior, no qual fixaram que para encontrar o arco côngruo era necessário apenas fazer a diferença entre o ângulo apresentado na situação e o ângulo total da circunferência. Deste modo, a resolução da situação do problema do capitão foi solucionada de modo que os estudantes desenharam um novo círculo trigonométrico e fizeram marcações acerca dos valores presentes em cada quadrante, para no final realizarem mentalmente a adição entre eles, compreendendo que em razão destes possuem



a mesma extremidade no círculo trigonométrico era possível encontrar uma solução apenas por meio do uso do círculo trigonométrico. No final do desenvolvimento da situação, foi explicado na lousa como solucionar o problema, de modo que todos participaram na formulação da resposta final.

5 Considerações finais

Diante deste relato é possível inferir que as ações pedagógicas planejadas e desenvolvidas contribuíram para uma aprendizagem mais significativa da trigonometria, incluindo o conceito de arcos côngruos. Apresentar a história da trigonometria para os estudantes, mostrando o modo como os conceitos surgiram a partir de necessidades práticas, como a navegação, tornou o aprendizado mais interessante. Além disso, o fato de as ações serem pautadas em um dos aspectos históricos da origem da trigonometria, possibilitou a eles compreenderem sua “[...] origem como decorrentes das necessidades humanas, o seu desenvolvimento histórico e lógico” (Moura et al, 2017, p. 94).

O uso do jogo foi motivador, demonstrando que essa pode ser uma estratégia eficaz no ensino de trigonometria, pois proporciona um ambiente mais dinâmico, divertido e engajador, além de possibilitar os estudantes a desenvolverem o raciocínio lógico. No que tange ao Problema do capitão a mediação do professor se fez fundamental para o desenvolvimento da situação, pois a dificuldade em interpretar o enunciado e as informações presentes nele dificultou a busca pela solução do problema. Ao considerar que a “[...] aprendizagem dos conceitos científicos adquiridos via mediação cultural, que se dá na e pela interação com professores e colegas, apóia-se em um conjunto previamente desenvolvido de conhecimentos originários das experiências diárias da criança” (Martins, 2011, p. 119), a mediação do professor é um elemento fundamental no processo de ensino e aprendizagem da matemática, especialmente no ensino de trigonometria, que frequentemente apresenta desafios conceituais para os estudantes⁴.

Referências

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978. (Coleção Perspectivas do homem).

LANNER DE MOURA, Anna Regina. MOURA, Manoel Oriosvaldo de. *Matemática para educação infantil: conhecer (re) criar - um modo de lidar com as dimensões do mundo*. *Escola:*

⁴ Este trabalho contou com a supervisão da coordenadora da área de exatas da Escola Estadual Reverendo Augusto Paes de Ávila Dilma de Lima Andrade.

