

Análise Comparativa de Tecnologias Digitais: o caso de ambientes computacionais Maple e GeoGebra no Ensino Superior

Comparative Analysis of Digital Technologies: the case of Maple and GeoGebra computing environments in Higher Education

Afonso Henriques¹ • Elisângela Silva Farias² • Marcos Rogério Neves³ • Rosane Leite Funato⁴ • Ramon Santos Costa⁵

Resumo: Este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise comparativa das ferramentas dos ambientes computacionais *Maple* e *GeoGebra*, munidas de potencialidades para o ensino de Matemática na Educação Superior. Para isso, dedicamos uma atenção especial a *modelagem paramétrica* de crivos de superfícies e de sólidos, na perspectiva de domínios de integração de funções de três variáveis propostas nos cursos de ciências exatas e tecnológicas. Como fundamentação nos baseamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Abordagem Instrumental. Seguimos a Análise Institucional & Sequência Didática como metodologia de pesquisa. Os resultados mostram que os dois ambientes computacionais oferecem ferramentas tecnológicas distintas, porém, munidas de potencialidades equivalentes na *modelagem paramétrica* de superfícies e de espaços tridimensionais finitos (sólidos). Conclui-se, portanto, que dependendo dos objetos matemáticos visados no ensino e (ou) na pesquisa, a utilização de qualquer um desses ambientes se configura como uma excelente alternativa para aprendizagem matemática na Educação Superior, pois, as suas ferramentas munidas de potencialidades equivalentes proporcionam resultados idênticos com eficiência, mesmo contendo algumas especificidades digitais de cada ambiente.

Palavras-chave: ferramenta, potencialidade, sólido, modelagem paramétrica, crivo geométrico.

Abstract: This work aims to present a comparative analysis of the tools of the Maple and GeoGebra computing environments, equipped with potential for teaching Mathematics in Higher Education. To this end, we pay special attention to parametric modeling of surface and solid screens, from the perspective integration domains of three-variable functions proposed in exact and technological science courses. As a foundation, we based ourselves on the Theory of Semiotic Representation Registers and the Instrumental Approach. We follow Institutional Analysis & Didactic Sequence as a research methodology. The results show that both computational environments offer different technological tools, however, equipped with equivalent potential in the parametric modeling of surfaces and finite three-dimensional spaces (solids). It is concluded, therefore, that depending on the mathematical objects targeted in teaching and (or) research, the use of any of these environments is an excellent alternative for mathematical learning in Higher Education, because its tools have equivalent potential, they efficiently provide identical results, even containing some digital specificities of each environment.

Keywords: tool, potential, solid, parametric modeling, geometric sieve.

1 Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa em andamento no **Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC)** da **Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)** que tem como objetivo “*investigar as possibilidades de articulação dos processos de produção de modelos PCOC impressos em 3D e de vídeos na constituição de recursos úteis em salas de aulas de Matemática visando a aprendizagem dos*

¹ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ henry@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

² Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ esfarias@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-4052-2351>

³ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ marcos_neves@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0006-3133-1541>

⁴ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ rlfunato@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-6799-0876>

⁵ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA -Brasil • ✉ rscosta@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0002-6290-4358>.



estudantes, desde a Educação Básica ao Ensino Superior. A produção dos modelos PCOC (Projetos de Construção de Objetos Concretos) preconizados nesse projeto se utiliza de curvas, superfícies e funções de uma, duas e (ou) de três variáveis, partindo da hipótese de que “Ver” matematicamente os objetos de saberes, principalmente, tridimensionais, nem sempre foi uma tarefa fácil para muitos estudantes em curso de formação universitários em Matemática e áreas afins. Auxiliar o estudante no entendimento desse fenômeno (de visualização), visando a solução de problemas correspondentes, é uma preocupação de muitos educadores que zelam pela aprendizagem matemática dos estudantes. Nesta preocupação, as tecnologias digitais surgem como aliadas, uma vez que, diversos objetos tridimensionais trabalhados em sala de aula podem ser construídos com auxílio de *softwares*, contribuindo no entendimento do referido fenômeno. Além disso, o acesso desses objetos que era simplesmente virtual na tela do computador ou por impressão no papel, vem ganhando possibilidades de materialização por prototipagem rápida na impressora em 3D, de modo que sejam acessíveis também a “mão livre” ou reproduzidos via materiais recicláveis, como vem sendo feito em diversos Laboratórios de Ensino de Matemática. Surge, no entanto, o questionamento: Qual é o ambiente computacional (*software*) utilizar? Tratando-se de uma pesquisa em andamento, nós já temos resposta para esse questionamento. Assim, este trabalho tem como objetivo apresentar uma análise comparativa das ferramentas dos ambientes computacionais *Maple* e *GeoGebra*, munidas de potencialidades para o ensino de Matemática na Educação Superior. Como fundamentação, mergulhamos a pesquisa no quadro teórico que apresentamos a seguir.

2 Quadro teórico

Apoiamo-nos no quadro constituído pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993) e a Abordagem Instrumental (ABIN) de Rabardel (1995). Como é de se imaginar, as duas teorias são robustas, ricas de conceitos. Assim, optamos por não descrever sistematicamente os seus elementos teóricos, mas no decorrer do texto, o nosso discurso será fundamentado nesses elementos sempre que for necessário. Desta forma, faremos referências aos *tipos de registro* (a saber, a língua materna, e os registros algébrico, gráfico e numérico em TRRS); às relações Sujeito-instrumento [S-i] (Instrumentação), Instrumento-Objeto [i-O] (Instrumentalização), Sujeito-Objeto [S-O] e Sujeito-Objeto por mediação do instrumento [S(i)-O] do modelo de Situações de Atividade Instrumentais (SAI) em ABIN; bem como à análise de potencialidades e entraves das ferramentas (no caso os softwares que estamos comparando).

Além disso, para evitarmos conflitos de reflexão na perspectiva da Educação Matemática, na qual o termo modelagem se consolida dentro de uma vertente de investigação,

achamos por bem compartilhar a Modelagem paramétrica que empregamos nas pesquisas.

A *Modelagem paramétrica* é uma técnica de geração e manipulação de objetos geométricos, como curvas e superfícies em ambiente computacional, e se apoia na conexão destes objetos e suas inter-relações mediadas por parâmetros especificados que podem ser alterados automaticamente pelo ambiente ou pelo sujeito em tempo real, sem perda da geometria visada (Henriques, 2021b, p. 107, *grifo nosso*).

Essa modelagem colabora na produção dos modelos PCOC citados, em que o conceito de parametrização de curvas e de superfícies exerce um papel importante. Nessa comunicação seguimos a metodologia de Análise Institucional & Sequência Didática (Henriques, 2019), organizada em oito etapas, restringindo este trabalho na 4ª, que consiste na análise de elementos institucionais, e escolhemos a tecnologia, conduzindo particularmente, a análise dos softwares que apresentamos a seguir.

3 Análise de um software

A *análise de um software* ou ambiente computacional é um processo intelectual e investigativo de tecnologias digitais, que visa identificar as ferramentas, comandos ou recursos deste ambiente munidos de potencialidades e possíveis entraves que intervêm na resolução de problemas ou tarefas, em torno de objetos específicos de saberes. Suponhamos que o problema seja:

Representar, no registro gráfico, quatro câmaras de ar simulando as suas posições de instalação nas rodas de um veículo sobre uma pista, utilizando um ambiente computacional projetado para Matemática. Identificamos esse problema por **Problema [4C]**

A primeira ação do sujeito, antes de pensar em um ambiente computacional que possa utilizar é ter em mente uma praxeologia, isto é, um discurso racional matemático sobre a organização de, ao menos, um objeto do saber capaz de favorecer a modelagem do problema. Em seguida, investigar, dentre as tecnologias digitais disponíveis, os ambientes computacionais que proporcionem recursos ou ferramentas munidas de potencialidades que intervêm na modelagem do problema ou tarefa. Relativamente a primeira ação, encontramos na Matemática, especialmente, em Topologia, um objeto do saber denominado *toro*, assim definido:

Um *toro* em Matemática é uma superfície que consiste em um espaço topológico homeomorfo ao produto de duas circunferências, contidas em dois planos ortogonais entre si, cada [Figura 1], e tem a forma de uma câmara de ar **de um automóvel**.



Figura 1: Ilustrativo de um processo geométrico de geração de um toro
No contexto geométrico pode-se, portanto, dizer que um toro, enquanto superfície, no registro gráfico, consiste no lugar geométrico tridimensional formado pela revolução da circunferência menor de raio b (*Geratriz*) em torno da circunferência maior de raio a (*Diretriz*) (Henriques (2021, p. 98). No registro algébrico, a superfície de um toro é parametrizada com as seguintes equações:

$$\begin{cases} X(u, v) = (a + b \cos(v)) \cos(u) \\ Y(u, v) = (a + b \cos(v)) \sin(u), u, v \in [0, 2\pi], \text{ sendo } b < a \\ Z(u, v) = b \sin(v) \end{cases}$$

em que a é o raio da *circunferência Diretriz* do toro e b é o raio da *circunferência Geratriz* do **toro**, conforme mostrado na Figura 2 Henriques (2021, p. 98).

Na topologia, dois espaços E_1 e E_2 são homeomorfos se E_1 pode ser transformado em E_2 ou vice-versa, através de deformações contínuas, sem rasgar ou colar novos crivos ou partes. Assim, o toro é, de fato, uma superfície homeomorfa ao produto de duas circunferências. Nesse caso, os dois espaços E_1 e E_2 são circunferências de raios distintos.

Se pensarmos no ambiente computacional *Maple* para resolver o **Problema [4C]**, devemos, imediatamente, nos preocupar em identificar as suas ferramentas que permitem representar superfícies no registro gráfico a partir das parametrizações correspondentes no registro algébrico.

O Maple é organizado com pacotes que agrupam ferramentas ou comandos para o tratamento de objetos de áreas de conhecimentos específicos. Assim, tem-se os pacotes para: Gráficos, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Objetos geométricos, Equações Diferenciais, etc. Para se carregar um pacote, utiliza-se o comando **with** segundo a sintaxe, **with(np)**, onde **np** é o nome do pacote que se deseja carregar (Henriques, 2021, p.61).

Além disso, o seu *kernel* (núcleo) “parte principal do sistema operacional de um computador, que exerce a função de estabelecer a conexão entre o *hardware* e os *softwares* executados pelo computador” Henriques (2021, p.61), também guarda comandos básicos, a exemplo do “*plot3d*” instrumentalizado com diferentes sintaxes. Apresentam-se no Quadro 1 duas dessas sintaxes com as respectivas potencialidades.

Quadro 1: Ferramentas do ambiente computacional *Maple*

N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	<i>plot3d</i>	<i>Plot3d(Expref, u=a..b, v=c..d, <opções>)</i>	Permitir a representação de funções de duas variáveis no registro gráfico.
2	<i>plot3d</i>	<i>plot3d([X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=a..b, v=c..d, <opções>)</i>	Permitir a representação de superfícies parametrizadas.

Fonte: Henriques (2021, p. 95)

Na **Sintaxe N.1: Expref** indica a expressão da função f . u e v são as variáveis da função f . a e b são necessariamente constantes, ao passo que c e d podem não ser constantes. Isto é, c e d podem, eventualmente, ser expressões que dependem de u . Na **Sintaxe N.2:** $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$ indicam as equações paramétricas da superfície S . Isto é:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

u e v são as variáveis das equações paramétricas da superfície S (Henriques, 2021, p. 95).

A relação entre o sujeito (S : *Estudante*) e o objeto (O : *Toro*) mediada pelo instrumento (i : *Maple*) pode ocorrer, imediatamente, a partir do conhecimento dessa ferramenta, a sua sintaxe, e consequentemente, as suas potencialidades. Assim, colocando esses conhecimentos em prática, podemos cumprir o **Problema [4C]** utilizando esse ambiente. Para isso, desenvolvemos a *Modelagem*

paramétrica que organizamos em grupos de execução, conforme mostrado no Quadro 2.

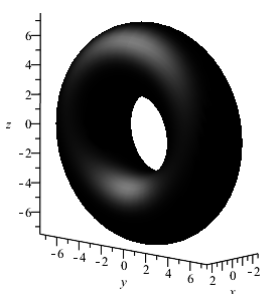
Quadro 2: Modelagem paramétrica do problema de simulação de quatro rodas em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 1): Declaração de variáveis globais	
with(plots):	# Carrega o pacote <i>plots</i> de representação de objetos no registro gráfico.
$rg := 2.5; rd := 5; xd := 20; yt := 25;$	# Variáveis globais (valor do raio menor (da <i>Geratriz</i> (<i>rg</i>)) e maior (da <i>Diretriz</i> (<i>rd</i>))), referências para localização de coordenadas.
$X := (u, v) \rightarrow (rd + rg \cdot \cos(v)) \cos(u);$	
$Y := (u, v) \rightarrow (rd + rg \cdot \cos(v)) \sin(u);$	
$Z := (u, v) \rightarrow rg \cdot \sin(v);$	# Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas.
Grupo de Execução (GE 2): Implementação de um toro	
$Camara := \text{plot3d}([Z(u, v), Y(u, v), X(u, v)], u = 0 .. 2\pi, v = 0 .. 2\pi, \text{labels} = [x, y, z], \text{color} = \text{black}, \text{scaling} = \text{constrained}); \text{display}(Camara)$	
Grupo de Execução (GE 3): Implementação de quatro toros simuladores de quatro câmaras de ar	
$QuatroCamaras := \text{plot3d}([Z(u, v), Y(u, v), X(u, v)], [xd + Z(u, v), Y(u, v), X(u, v)], [xd + Z(u, v), yt + Y(u, v), X(u, v)], [Z(u, v), yt + Y(u, v), X(u, v)]), u = 0 .. 2\pi, v = 0 .. 2\pi, \text{labels} = [x, y, z], \text{color} = \text{black}, \text{scaling} = \text{constrained});$	
$Pista := \text{plot3d}([u, v, -(rd + rg)], u = -rg .. xd + rg, v = -2rd .. yt + 2rd, \text{labels} = [x, y, z], \text{color} = \text{gray}, \text{scaling} = \text{constrained}); \text{display}(QuatroCamaras, Pista);$	

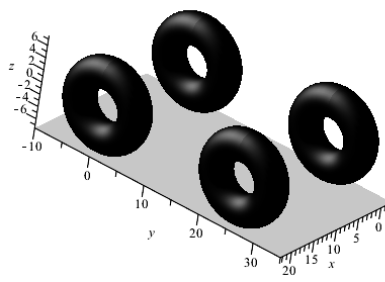
Fonte: Fonte: Dados da pesquisa

A execução do segundo grupo com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 2^a, ao passo que a execução das instruções que compõem o terceiro grupo dessa Modelagem paramétrica, retornam o resultado esperado, apresentado na Figura 2b.

Figura 2: Simulação de representação de câmaras de ar no ambiente computacional *Maple*



(a) Representação de uma câmera de ar



(b) representação de quatro câmaras de ar

Fonte: Dados da pesquisa

Visando a realização de uma análise comparativa de ferramentas de ambientes computacionais em conformidade com a definição apresentada anteriormente, passamos analisar o **Problema [4C]** no *GeoGebra*. Encontramos nesse *software*, uma ferramenta, que por sinal a sua nomenclatura é sugestiva. Trata-se do comando “*Superfície*”, munido de potencialidades de visualização de superfícies de equações parametrizadas, cujo esquema de utilização mobiliza a seguinte sintaxe:

Superfície (Expressão, Expressão, Expressão, Variável 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável 2, Valor Inicial, Valor Final)

Nesta sintaxe, as informações: “**Expressão, Expressão, Expressão**” representam expressões das equações paramétricas da superfície *S*, ao passo que “**Variável 1 e Variável 2**” representam os parâmetros de extremidades em **Valor Inicial** e **Valor Final**, cada. Utilizando esses conhecimentos, pode-se cumprir o **Problema [4C]** no *GeoGebra*, desenvolvendo a *Modelagem paramétrica* em grupos de execução, conforme descrito no Quadro 3.

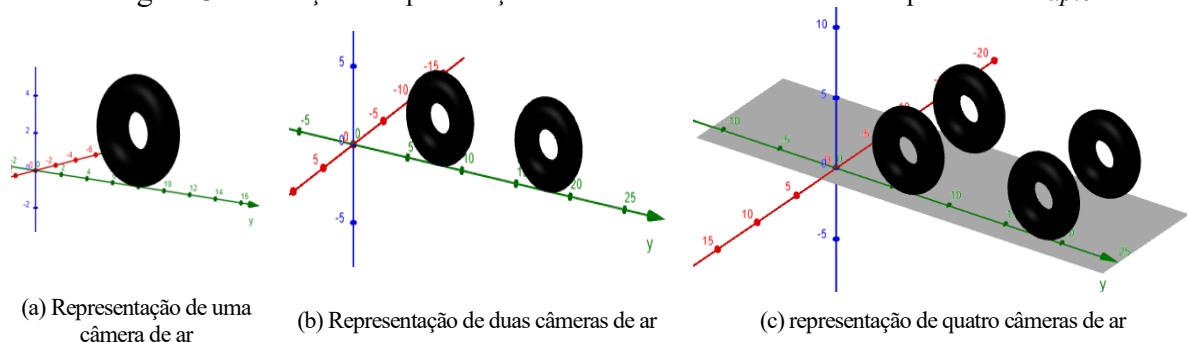
Quadro 3: Modelagem paramétrica do problema de simulação de quatro rodas em grupos de execução no *GeoGebra*.

Grupo de Execução (GE 1): Declaração de variáveis globais	
$rg = 1; rd = 2; xc1 = 0; yc1 = 8; zc1 = 3$	Variáveis globais (valor do raio menor (da <i>Geratriz</i> (rg)) e maior (da <i>Diretriz</i> (rd))) declaradas como controles deslizantes.
$X(x, y) = (rd + rg \cdot \cos(y)) \cos(x)$	Referências do centro ($xc1, yc1, zc1$) da primeira câmara de ar.
$Y(x, y) = (rd + rg \cdot \cos(y)) \sin(x)$	Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas.
$Z(x, y) = rg \cdot \sin(y)$	
Grupo de Execução (GE 2): Implementação da primeira câmara de ar	
Camara1 = Superfície($xc1 + Z(u, v), yc1 + Y(u, v), zc1 + X(u, v), u = 0..2\pi, v = 0..2\pi$)	
Grupo de Execução (GE 3): Implementação da segunda câmara de ar deslocada 10 uc	
Camara2 = Superfície($xc1 + Z(u, v), yc1 + VetorComprimento + Y(u, v), zc1 + X(u, v), u = 0..2\pi, v = 0..2\pi$)	
Grupo de Execução (GE 3): Implementação da terceira e da quarta câmara de ar por translação	
$A = (0,0,0)$	
$B = (-8,0,0)$	
VetorTranslação = Vetor(A, B)	
Camara1' = Transladar (Camara1, VetTranslação)	
Camara2' = Transladar (Camara2, VetTranslação)	
Pista = Superfície($u, v, zc1 - zc1, u, -9, 2, v, -11, 25$)	

Fonte: Dados da pesquisa

Cada instrução é inserida no **prompt** ou **campo de entrada** na janela algébrica do *GeoGebra*, ocupando um único *prompt*. Nessa modelagem, a instrução do segundo grupo, retorna o resultado apresentado na Figura 3a. No segundo grupo obtém-se o resultado apresentado na Figura 3b, ao passo que a execução das instruções que compõem o terceiro grupo desta modelagem, retornam o resultado esperado na resolução do **Problema [4C]**, que apresentamos na Figura 3c.

Figura 3: Simulação de representação de câmeras de ar no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

É fundamental sublinhar que, nessa modelagem, além de estabelecer a relação entre a teoria do objeto do saber, a partir do seu tratamento em ambiente papel/lápis e no ambiente computacional, o sujeito (*S: Estudante*), deve desenvolver competências e habilidades na relação usual [S-O] recomendadas nos documentos oficiais, tais como a BNCC, o Projeto Político Pedagógico do curso, a citar: localizar um ponto no espaço 3D; relacionar variáveis didáticas com os seus respectivos valores; associar ternos de números reais com os pontos correspondentes em 3D, mobilizar noções de vetor; transformações geométricas. Ademais, deve-se mobilizar as ferramentas do ambiente computacional.

Vale ainda destacar que o resultado obtido no *GeoGebra*, apresentado na Figura 3 de forma estática, simula perfeitamente o **Problema [4C]** utilizado como referência dessa análise. Pois, a sua modelagem admite que os toros representantes das câmeras de ar possam locomover-se, por animação, ao longo da pista representada por um crivo (parte) do plano xy .

Antes de passarmos para a análise comparativa, consideremos ainda o Gerador de tarefas apresentado do Quadro 4, que traz uma adaptação de um exemplo sobre integrais triplas, extraído do livro de Swokowski v. 2. p. 502.

Quadro 4: Gerador de tarefas sobre integrais triplas mobilizando diferentes registros de representação

Gerador de tarefas GT1	Considerar as superfícies S1, S2 e S3 de equações dadas por $y = x^2$, $z + y = 4$ e $z = 0$, para realizar as seguintes tarefas:	
	t1	Apresentar as equações paramétricas de S1, S2 e S3, no registro algébrico.
	t2	Representar cada superfície, no registro gráfico, em um ambiente computacional.
	t3	Representar, no registro gráfico, o espaço tridimensional finito $\mathcal{Q}$ delimitado por crivo restritos de S1, S2 e S3.
	t4	Estabelecer uma integral dupla ou tripla que permite o cálculo do volume do sólido $\mathcal{Q}$.

Fonte: Adaptação do exemplo 3, Swokowski v. 2. p. 502. Makron Books, 1994

Resolução da t1 do GT1

A realização desta tarefa independe do ambiente computacional, e o estudante deve entender que na equação de S1, a variável z é implícita e independente quanto a variável x . Para S2, a variável x é implícita. Para S3, as variáveis x e y são implícitas. Essa implicitude de variável atua como contrato didático na organização das integrais múltiplas, garantido pelo termo “*Superfície*” que consiste no conjunto de pontos do espaço tridimensional. Assim, utilizando a definição apresentada anteriormente o estudante deve representar a parametrização de cada uma dessas superfícies conforme mostrado no Quadro 5.

Quadro 5: Parametrização das superfícies S1, S2 e S3

Para S1 de equação $y = x^2$ tem-se a parametrização:	Para S2 de equação $z + y = 4$, tem-se a parametrização:	Para S3 de equação $y = x^2$ tem-se a parametrização:
$S1: \begin{cases} X(u, v) = u \\ Y(u, v) = u^2, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ Z(u, v) = v \end{cases}$	$S2: \begin{cases} X(u, v) = u \\ Y(u, v) = v, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ Z(u, v) = 4 - v \end{cases}$	$S1: \begin{cases} X(u, v) = u \\ Y(u, v) = v, u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \\ Z(u, v) = 0 \end{cases}$

Com essa parametrização pode-se passar para a resolução da segunda tarefa do GT1.

Resolução da t2 do GT1 no Maple

Para realizar essa tarefa utilizando as ferramentas do *software Maple*, foi desenvolvida uma *Modelagem paramétrica* organizada em grupos de execução, conforme mostrado no Quadro 6. É importante o estudante entender que “*tudo e qualquer espaço tridimensional finito é inscritível em um subespaço paralelepípedo finito*”. Assim, a escolha dos intervalos de variação dos parâmetros u e v para cada crivo não restrito (CnR) ao sólido $\mathcal{Q}$ são escolhidos considerando esse entendimento.

Quadro 6: Modelagem paramétrica do espaço tridimensional finito $\mathcal{Q}$ (Parte II: representação de crivos não restritos)

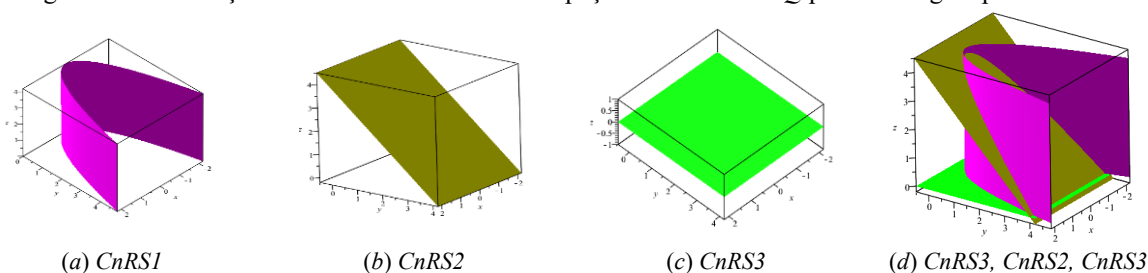
Grupo de Execução (GE 1): Carregar o pacote “plots” e implementação da S1	
with(plots):	# Carrega o pacote “plots”.
$XS1 := (u, v) \rightarrow u; YS1 := (u, v) \rightarrow u^2; ZS1 := (u, v) \rightarrow v;$	# Equações paramétricas.
$CnRS1 := plot3d([XS1(u, v), YS1(u, v), ZS1(u, v)], u = -2.2 .. 2.2, v = 0 .. 4.2,$	# Instrução de visualização de um crivo da superfície S1.
$labels = [x, y, z], color = magenta, scaling = constrained): display(RnRS1)$	
Grupo de Execução (GE 2): Carregar o pacote “plots” e implementação da S2	

$XS2 := (u, v) \rightarrow u$; $YS2 := (u, v) \rightarrow v$; $ZS2 := (u, v) \rightarrow 4 - v$;	# Equações paramétricas.
$CnRS2 := \text{plot3d}([XS2(u, v), YS2(u, v), ZS2(u, v)], u = -2.2 .. 2.2, v = -0.5 .. 4.2,$	# Instrução de visualização de
$labels = [x, y, z], color = yellow, scaling = constrained): display(CnRS2)$	um crivo da superfície S2.
Grupo de Execução (GE 3): Carregar o pacote “plots” e implementação da S3	
$XS3 := (u, v) \rightarrow u$; $YS3 := (u, v) \rightarrow v$; $ZS3 := (u, v) \rightarrow 0$;	# Equações paramétricas.
$CnRS3 := \text{plot3d}([XS3(u, v), YS3(u, v), ZS3(u, v)], u = -2.2 .. 2.2, v = 0 .. 4.2,$	# Instrução de visualização de
$labels = [x, y, z], color = green, scaling = constrained): display(CnRS3)$	um crivo da superfície S3.
Grupo de Execução (GE 4): Visualização simultânea de crivos não restritos de S1, S2 e S3	
$display(CnRS1, CnRS2, CnRS3)$	

Fonte: Dados da pesquisa

As instruções apresentadas nos grupos GE1 à GE4 quando executadas, sucessivamente, com a tecla, “Enter” retornam, respectivamente, os resultados apresentados na Figura 4.

Figura 4: Visualização de crivos não restritos ao espaço tridimensional Q por modelagem paramétrica



Fonte: Dados da pesquisa

Resolução da t3 do GT1 no Maple

A modelagem prossegue com análise e implementação de crivos restritos ao sólido Q . Para isso, é fundamental o conhecimento de interseção de superfícies. Esse conhecimento permite mobilizar o domínio de cada crivo restrito ao sólido, conforme apresentado a seguir. Assim:

Para $I_1 = S1 \cap S2$, tem-se que: $y = x^2$ e $z = 4 - y \rightarrow z = 4 - x^2$	Para $I_2 = S1 \cap S3$, tem-se: $y = x^2$ e $z = 0 \rightarrow y = x^2$	Para $I_3 = S2 \cap S3$, temos: $z = 4 - y$ e $z = 0 \rightarrow y = 4$
--	--	---

De I_2 e I_3 conclui-se que $x = \pm 2$. Dessa forma, analisando o resultado apresentado na Figura 4d, podemos decidir e representar cada crivo restrito (CRS1, CRS2 e CRS3) ao Q , analiticamente, no registro algébrico, como segue:

$$CRS1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -2 \leq x \leq 2, y = x^2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$$

$$CRS2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, z = 4 - y\}$$

$$CRS3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, z = 0\}$$

Essa análise, favorece a implementação de cada crivo restrito por grupo de execução. Assim, na continuidade da *Modelagem paramétrica*, o estudante deve atualizar apenas os extremos dos parâmetros u e v nas instruções de $CnRS1$, $CnRS2$ e $CnRS3$, gerando assim os crivos restritos CRS1, CRS2 e CRS3 conforme apresentado no Quadro 7.

Quadro 7: Modelagem paramétrica do espaço tridimensional finito Q (Parte II: representação de crivos restritos)

Grupo de Execução (GE 5): Implementação do crivo de S1 restrito ao sólido	
$CRS1 := \text{plot3d}([XS1(u, v), YS1(u, v), ZS1(u, v)], u = -2..2, v = 0..4 - u^2, labels = [x, y, z], color = magenta, scaling = constrained): display(CRS1)$	# Instrução de visualização do crivo CRS1.
Grupo de Execução (GE 6): Implementação do crivo de S2 restrito ao sólido	
$CRS2 := \text{plot3d}([XS2(u, v), YS2(u, v), ZS2(u, v)], u = -2..2, v = u^2..4, labels = [x, y, z], color = yellow, scaling = constrained): display(CRS2)$	# Instrução de visualização do crivo CRS2.

Grupo de Execução (GE 7): Implementação do crivo de S3 restrito ao sólido

`CRS3:=plot3d([XS3(u, v), YS3(u, v), ZS3(u, v)], u = -2..2, v = u2..4, labels = [x, y, z], color = green, scaling = constrained): display(CRS3)` # Instrução de visualização do crivo CRS3.

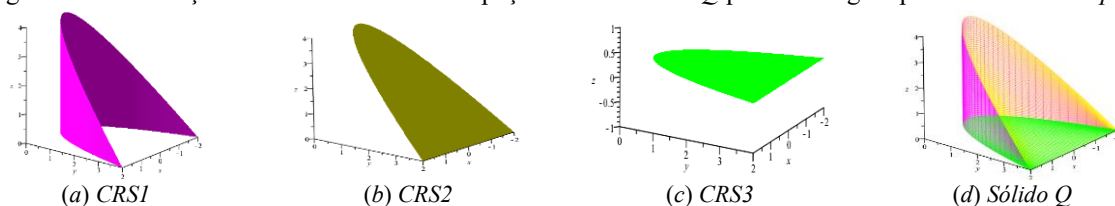
Grupo de Execução (GE 8): Visualização simultânea de crivos não restritos de S1, S2 e S3

`display(RnRS1, RnRS2, RnRS3)`

Fonte: Dados da pesquisa

As instruções apresentadas nos grupos GE5, GE6, GE7 e GE8 quando executadas, sucessivamente, retornam, respectivamente, os resultados apresentados na Figura 5.

Figura 5: Visualização de crivos restritos ao espaço tridimensional Q por modelagem paramétrica no *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

Com base nesse resultado, é possível o sujeito (estudante) concluir que o espaço tridimensional ou equivalentemente, o domínio de integração que consiste no *sólido* Q é representado, analiticamente, no registro algébrico por:

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ com } (x, y) \in R; 0 \leq z \leq 4 - y\} \text{ em que } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$$

Essa representação lhe favorece realizar a **t4 do GT1**, estabelecendo uma integral dupla da função $f(x, y) = 4 - y$ sobre R ou uma tripla da função $g(x, y, z) = 1$ sobre Q .

$2 \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4 - y) dy dx$	por simetria da região R em relação ao eixo y	$2 \int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx$	por simetria do sólido Q em relação ao plano xy
---	---	---	---

Identificamos as ferramentas **Int**, **int**, **Doubleint** e **Tripleint** no *Maple* munidas de potencialidades de representar integral ou calcular uma integral. Sendo **Doubleint** e **Tripleint** no pacote “*student*”. Mas, deixamos desenvolver a análise detalhada sobre essas ferramentas em trabalhos futuros.

Procedendo de forma análoga ao caso da **Problema [4C]** (*simulação de quatro câmaras de ar*), visando a análise comparativa, passamos a tratar as **tarefas do GT1** no *GeoGebra* a partir da **t2**.

Resolução da t2 do GT1 no *GeoGebra*

Para analisar essa tarefa, isto é, “representar a superfície S1, S2 e S3 no *GeoGebra*”, organizamos a *Modelagem paramétrica* em grupos de execução, considerando as mesmas definições de X, Y e Z para S1, S2 e S3 apresentadas anteriormente no Quadro 5. A distinção de um grupo para outro foi realizada mediante a utilização da ferramenta “Texto” do *GeoGebra*, ocupando um campo de entrada (ou *prompt*) cada. Além disso, toda instrução fornecida ao *GeoGebra* na janela algébrica ocupa um único *prompt*. Assim, apresentam-se no Quadro 8 as instruções de visualização de crivos não restritos ao sólido Q .

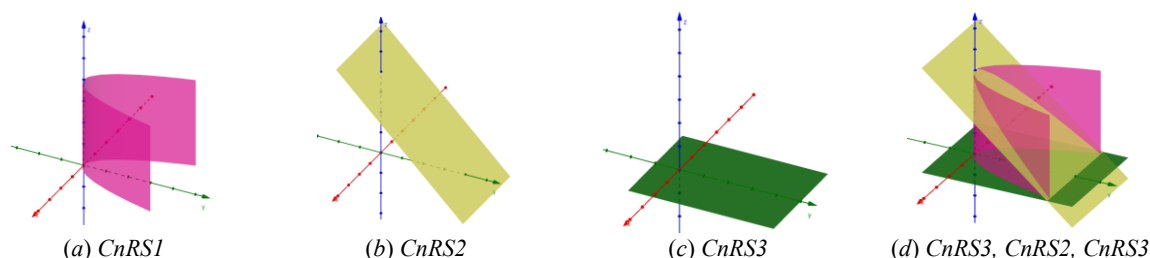
Quadro 8: Modelagem paramétrica das superfícies cujos os crivos restritos delimitam o espaço tridimensional Q .

Grupo de Execução (GE 1): Carregar o pacote “plots” e implementação da S1		
$XS1(u, v) = u$; $YS1(u, v) = u^2$; $ZS1(u, v) = v$:	Equações paramétricas em linhas separadas.	
$CnRS1= Superfície(XS1(u, v), YS1(u, v), ZS1(u, v), u,-2, 2, v, 0,4)$	Instrução de visualização de $CnRS1$.	
Grupo de Execução (GE 2): Carregar o pacote “plots” e implementação da S2		
$XS2(u, v) = u$; $YS2(u, v) = v$; $ZS2(u, v) = 4 - v$:	Equações paramétricas em linhas separadas.	
$CnRS2= Superfície(XS2(u,v),YS2(u,v), ZS2(u,v), u,-2.2, 2.2, v, -1, 5)$	Instrução de visualização de $CnRS2$.	
Grupo de Execução (GE 3): Carregar o pacote “plots” e implementação da S3		
$XS3(u, v) = u$; $YS3(u, v) = v$; $ZS3(u, v) = 0$	Equações paramétricas em linhas separadas.	
$CnRS3=Superfície(XS3(u,v),YS3(u,v), ZS3(u,v), u, -2.2, 2.2, v, -1, 5)$	Instrução de visualização de $CnRS3$.	

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale sublinhar que toda instrução implementada corretamente no *GeoGebra* é executada automaticamente, pelo *software* antes mesmo de apertar a tecla “Enter”. Os três grupos assim implementados no *GeoGebra* retornam o resultado que apresentamos na Figura 6.

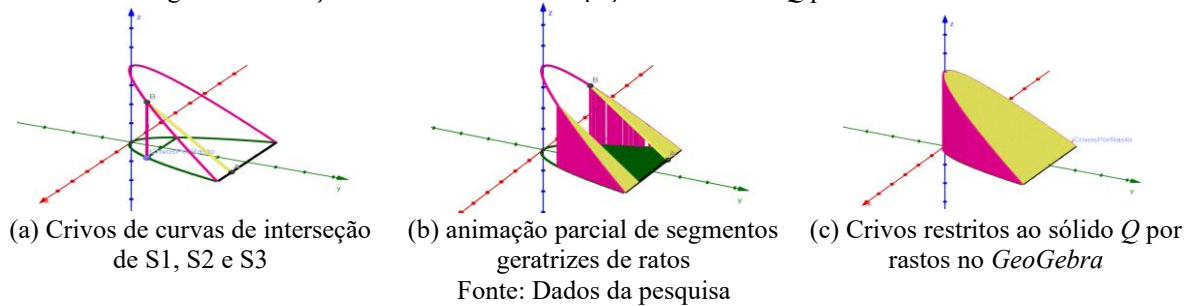
Figura 6: Visualização de crivos não restritos ao espaço tridimensional Q por modelagem paramétrica no *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar na instrução de $CnRS1$, de $CnRS2$ e de $CnRS3$, que os valores dos parâmetros u e v nos extremos são todos constantes reais. Isso significa que o domínio de cada um desses crivos não restritos ao sólido é uma região retangular. No entanto, nenhum dos domínios dos crivos restritos ao sólido Q em questão é retangular. Com efeito, o comando “*Superfície*” do *GeoGebra*, não é instrumentalizado com potencialidades capazes de retornar crivos de superfícies dos quais os extremos dos parâmetros contêm expressões algébricas. Ou seja, uma instrução como: *Superfície* ($XS1(u, v)$, $YS1(u, v)$, $ZS1(u, v)$, u , $-2, 2$, v , $0, 4 - u^2$) é inoperante. Assim, no âmbito da *Abordagem Instrumental*, a ferramenta “*Superfície*” do *GeoGebra* se configura um entrave de comando relativamente ao tipo de tarefas: “*Determinar o crivo de uma superfície cujo domínio não é retangular*”. Mas, atenção: entrave não significa limitação do *software* (Henriques, 2021a, p. 264). O referido espaço finito Q , por exemplo, pode ser visualizada no *GeoGebra* utilizando a ferramenta “*Rasto*”. Para isso, outras ações instrumentais são necessárias na relação [S-i]: determinar as curvas de interseção das três superfícies duas a duas, conforme apresentadas anteriormente (I_1, I_2 e I_3); parametrizar de cada curva; determinar as geratrizes de rastos para cada crivo restrito com os respectivos pontos de animação; selecionar cores de preferência. Não apresentamos essas ações neste texto, apenas o resultado alcançado na implementação dessas ações, mostrado na Figura 7. Não obstante, um link de acesso ao arquivo dessa modelagem será disponibilizado na versão final deste texto.

Figura 7: Simulação de crivos restritos ao espaço tridimensional Q por rasto no *GeoGebra*



As análises separadas dos dois ambientes *Maple* e *GeoGebra* a partir dos dois problemas considerados permitem apresentar a análise comparativa dos dois ambientes como segue.

4 Análise comparativa de softwares

O nosso propósito nessa seção não é indicar qual seja o melhor *software* e nem o pior, e sim, almejar o objetivo geral deste trabalho, ou seja, apresentar uma análise comparativa das ferramentas dos ambientes computacionais *Maple* e *GeoGebra* munidas de potencialidades para ensino de Matemática na Educação Superior. Para isso, apoiamo-nos no Quadro teórico de referência apresentado anteriormente e na definição de **análise de um software**. Considerando o **Problema [4C]** “simulação de quatro câmaras de ar” e o Gerador de tarefas (GT1) sobre integrais tripla, identificamos as ferramentas dos dois *softwares* e as suas respectivas potencialidades que apresentamos no Quadro 9.

Quadro 9: Ferramentas e potencialidades dos ambientes computacionais analisados

Ferramentas do ambiente computacional <i>Maple</i> utilizadas			
N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	Prompt	Sem sintaxe	Permitir a entrada de instruções
2	Sem comando	$F := (x, y) \rightarrow \text{Expressão em } x \text{ e } y$	Permitir especificar uma função de duas variáveis x e y
3	<i>plot3d</i>	<i>plot3d</i> ($[X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=a..b, v=c..d, <opções>$)	Permitir representar superfícies parametrizadas.
4	<i>display</i>	<i>display</i> (variáveis)	Permitir visualizar objetos simultaneamente
5	<i>Doubleint</i>	<i>Doubleint</i> ($f(x, y), y = c..d, x = a..b$)	Permitir estabelecer uma integral dupla sem calcular
6	<i>Tripleint</i>	<i>ITripleint</i> ($f(x, y, z), z = m..n, y = c..d, x = a..b$)	Permitir estabelecer uma integral tripla sem calcular
7	Texto	Sem sintaxe	Permitir digitar textos
Ferramentas do ambiente computacional <i>GeoGebra</i> utilizadas			
N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	Prompt	Sem sintaxe	Permitir a entrada de instruções
2	Sem comando	$F(x, y) = \text{Expressão em } x \text{ e } y$:	Permitir especificar uma função de duas variáveis x e y
3	Superfície	<i>Superfície</i> (Expressão, Expressão, Expressão, Variável 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável 2, Valor Inicial, Valor Final)	Permitir representar superfícies parametrizadas
4	Curva	<i>Curva</i> (Expressão, Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)	Permitir representar curvas parametrizadas
5	Sem comando	$P = (x, y, z)$	Permitir especificar um ponto
6	Vetor	<i>Vetor</i> (Ponto Inicial, Ponto Final)	Permitir representar um vetor
7	Transladar	Transladar (Objeto, Vetor)	Permitir transladar um objeto
8	Texto	Sem sintaxe	Permitir digitar textos
9	Rasto	Sem sintaxe	Permitir visualizar o rasto de um objeto

Fonte: Dados da pesquisa



Constatamos que os dois ambientes computacionais são instrumentalizados com interfaces, ferramentas e sintaxes distintas, porém, munidas das mesmas potencialidades relativamente ao ensino e aprendizagem de superfícies matemáticas na Educação Superior. A parametrização mobilizada em cada *software* segue a estrutura usual de representação de superfícies parametrizadas em ambiente papel/lápis, contemplando assim a instrumentalização desse objeto do saber, porém, cada *software* tem a sua própria estrutura de utilização desse objeto na *Modelagem paramétrica*.

Vale sublinhar que a identificação de ferramentas do *software* durante a análise na relação [S-i], segundo modelo SAI foi mais sugestiva no *GeoGebra* do que no *Maple*. Pois, o *prompt* do *GeoGebra* sugere acesso imediata de uma dada ferramenta, bastando para isso digitar algumas letras contidas no nome da ferramenta. É o caso, por exemplo, do “*Sup*” para identificar a ferramenta “Superfície”, o que não ocorre no *Maple* para identificar, por exemplo, a ferramenta “*plot3d*” localizada no seu *kernel* (o núcleo). Passemos as considerações finais.

5 Considerações finais

A análise de ambientes computacionais (*softwares*) e as suas possíveis comparações, deve ser considerada como uma das práticas prioritárias na vertente de tecnologias digitais em Educação Matemática, pois, se configura como processo intelectual importante na formação de recursos humanos, não apenas na Educação Superior, mas também em todos os níveis de escolaridades dos quais as tecnologias digitais são aliadas, em todos os sentidos formativos. Nas análises que apresentamos visando almejar o nosso objetivo, optamos, não apenas pelo relato de como ocorreram, e sim, trazendo exemplos específicos capazes de permitirem a realização de tarefas similares no processo ensino e aprendizagem. Assim, esperamos ter trazido contribuições significativas na perspectiva de análise e utilização de tecnologias digitais na Educação Matemática.

6 Referências

- DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. 1993.
- HENRIQUES, A. Abordagem Instrumental e aplicações. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.23. p. 247-280, 2021a.
- HENRIQUES, A. Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D. Ilhéus, BA: Editus. 2021b, 247 p.
- RABARDEL P. Les Hommes et les Technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin Editeur, Paris. 1995.
- SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2a ed. Makron Books. Vol. 2. São Paulo - Brasil. 1994.