

O GeoGebra e a Impressora 3D na produção de um protótipo visando a inclusão de estudantes com deficiência visual

GeoGebra and the 3D Printer in the production of a prototype aimed at the inclusion of students with visual impairments

Afonso Henriques¹ • Elisângela Silva Farias² • Marcos Rogério Neves³ • Rosane Leite Funato⁴ • Ramon Santos Costa⁵

Resumo: Este trabalho tem como objetivo trazer contribuições do *software GeoGebra* e da impressora 3D no cenário da Educação inclusiva de estudantes com deficiência visual. Para isso, propomos uma oficina de cunho matemático que valoriza a produção de protótipos, denominados visor cartesiano, munidos de potencialidades capaz de favorecer a aprendizagem matemática por tato, pelos estudantes citados e a olho nu para videntes, a partir do desenvolvimento da modelagem paramétrica de curvas, superfícies e gestão de código para impressora 3D. Como fundamentação, apoiamos-nos na teoria dos registros de representação semiótica e na abordagem instrumental. Seguimos o Percurso metodológico do desenvolvimento e aplicação de PCOC⁶. Os resultados mostram que os saberes matemáticos contemplados em um visor cartesiano, combinados com um diálogo, na língua materna, podem ser acessíveis de forma eficiente, tanto por estudantes videntes quanto por estudantes com deficiência visual por tato, favorecendo uma aprendizagem inclusão e indissociada. Assim, esperamos que essa proposta venha servir de incentivo para a produção e difusão de visores cartesianos, munidos de diferentes conceitos matemáticos, visando a aprendizagem, não apenas de estudantes com deficiência visual, mas também para todos os estudantes nos diferentes níveis formativos, contando com a utilização de *softwares* e da impressora 3D na Educação Matemática.

Palavras-chave: Visor Cartesiano. Modelagem paramétrica. Tato. Registros de representação.

Abstract: This work aims to bring contributions from the GeoGebra software and the 3D printer in the scenario of inclusive education for students with visual impairments. To this end, we propose a mathematical workshop that values the production of prototypes, called Cartesian displays, equipped with potentialities capable of promoting mathematical learning by touch, by the aforementioned students and by eye for sighted people, based on the development of parametric modeling of curves, surfaces and code management for 3D printers. As a foundation, we rely on the theory of semiotic representation records and the instrumental approach. We follow the methodological path for the development and application of PCOC. The results show that the mathematical knowledge contemplated on a Cartesian display, combined with a dialogue, in the mother tongue, can be efficiently accessible, both by sighted students and students with visual impairments by touch, favoring inclusive and inseparable learning. Therefore, we hope that this proposal will serve as an incentive for the production and dissemination of Cartesian displays, equipped with different mathematical concepts, aiming at learning, not only for students with visual impairments, but also for all students at different training levels, counting on the use of software and 3D printers in Mathematics Education.

Keywords: Cartesian Display. Parametric modeling. Touch. Representation records.

1 Introdução

Como é sabido, a Educação Inclusiva é uma perspectiva educativa que busca entender a educação na sua plenitude, favorecendo a participação de todo o estudante no ensino regular, independentemente das suas condições físicas ou intelectuais. A lei nº 13.146 publicada no Brasil, em

¹ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ henry@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

² Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ esfarias@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-4052-2351>

³ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ marcos_neves@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0006-3133-1541>

⁴ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ rlfunato@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-6799-0876>

⁵ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA -Brasil • ✉ rsocosta@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0002-6290-4358>

⁶ Projetos de Construção de Objetos Concretos.

06 de julho de 2015, instituindo a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência), assegura, no Art. 27, Capítulo IV (do Direito à Educação), que:

A educação constitui direito da pessoa com deficiência, assegurados sistema educacional inclusivo em todos os níveis e aprendizado ao longo de toda a vida, de forma a alcançar o máximo desenvolvimento possível de seus talentos e habilidades físicas, sensoriais, intelectuais e sociais, segundo as suas características, interesses e necessidades de aprendizagem (BRASIL, 2015).

Ainda nesse mesmo capítulo, e especialmente no Art. 28, sublinha-se que:

Incumbe ao poder público assegurar, criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar: VI - pesquisas voltadas para o desenvolvimento de novos métodos e técnicas pedagógicas, de materiais didáticos, de equipamentos e de recursos de tecnologia assistiva; VII - planejamento de estudo de caso, [...], organização de recursos e serviços de acessibilidade e de disponibilização e usabilidade pedagógica de recursos de tecnologia assistiva; [...]; X - adoção de práticas pedagógicas inclusivas pelos programas de formação inicial e continuada de professores e oferta de formação continuada para o atendimento educacional especializado; [...] (BRASIL, 2015).

Não obstante, mesmo com a aprovação dessa lei que, oficial e politicamente, assegura a inclusão de estudantes no ensino regular, o acontecimento inclusivo nas práticas efetivas envolvendo Estudantes Com Deficiência Visual, doravante também identificada por ECDV, ainda requer a busca e implementação de alternativas operacionais como preconizado nos incisos VI, VII e X do Art. 28. Nesse sentido, concordamos com Abreu (2013) quando argumenta que:

A inclusão do aluno portador de deficiência visual está garantida por lei, mas para que ele realmente possa ser incluído no ambiente de ensino, como qualquer outro aluno, e evitar a forma excludente como esse assunto tem sido tratado, é necessário que o Professor tenha orientação específica e, principalmente, boa vontade. Com um material adequado e uma metodologia específica, é possível trabalhar vários conteúdos, possibilitando maior desenvolvimento do raciocínio e a utilização da memória durante o aprendizado. (Abreu, 2013, p.9-10).

Nessa direção, Luz e Henriques (2022) acrescentam que:

Existem muitos entraves no âmbito institucional para que a inclusão aconteça, entre eles podemos pontuar também que há uma certa dificuldade do(a)s aluno(a)s, de modo geral, em compreender os conteúdos propostos nos componentes curriculares de cada ano do ensino. Isto é ainda mais visível quando se trata de disciplinas da área de exatas, como, a Matemática, a Física e a Química. Tratando-se de aluno(a)s que têm limitações, a dificuldade no processo ensino-aprendizagem pode ser ainda maior, nessa área (Luz e Henriques, 2022, p. 61).

Apontar alternativas importantes na perspectiva da Educação inclusiva é, portanto, uma busca contínua, que ao nosso ver, é também um compromisso da Didática da Matemática não como disciplina, mas sim como área de atuação. Assim, refletindo na conjuntura dessa problemática e considerando as possíveis contribuições que os recursos tecnológicos podem proporcionar, tanto no desenvolvimento profissional quanto na inclusão de Estudante Com Deficiência Visual, relativamente a aprendizagem matemática, bem como por saber que o ENEM é um encontro que reúne profissionais oriundos de diversas partes do Brasil, e inclusive do exterior, achamos oportuno propor um trabalho prático que agrega estratégias e métodos de

produção de materiais didáticos baseados nos Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) desenvolvidos no Laboratório de Visualização Matemática L@VIM da UESC, centrando as atividades da oficina na produção de um Visor Cartesiano Interativo, enquanto PCOC, útil para ECVD na aprendizagem de curvas e funções de uma variável real. Trata-se de um trabalho de cunho matemático que passa pela análise e tratamentos de conceitos de curvas, funções e de superfícies em ambiente papel/lápis em diferentes registros de representação semiótica e no ambiente computacional *GeoGebra*, reforçando a aliança existente entre os dois ambientes de aprendizagem (Henriques, Farias, Funato, 2021). Surge, contudo, os seguintes questionamos: o que é Visor cartesiano? Como produzir um Visor cartesiano no *GeoGebra* visando a Educação Matemática Inclusiva de ECDV? Onde entra a impressora 3D e o quadro teórico de referência deste trabalho? O que é *Modelagem paramétrica*? Esses questionamentos encontram respostas ao longo do desenvolvimento desta proposta. O público: todo participante do evento interessado. Quantidade de vaga: até 20. Recurso necessários: local com a internet para acesso ao *GeoGebra online* e um datashow. Duração da oficina: até 03:00.

2 Quadro teórico

Como sublinhado no resumo, apoiamo-nos na fundamentação constituída pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993) e a Abordagem Instrumental (ABIN) de Rabardel (1995). Teorias estas que não descrevemos aqui, mas ao logo do desenvolvimento da oficina, empregamos os seus elementos teóricos sempre que for necessário, tais como a língua materna, o registro algébrico, gráfico e numérico em TRRS, e ferramentas, potencialidades, instrumento em ABIN. Não obstante, apresentamos o que seja a *Modelagem paramétrica* e o Visor Cartesiano.

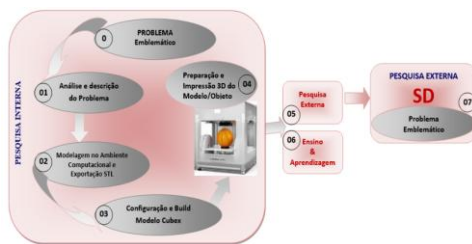
Assim, para evitarmos conflitos de reflexão na perspectiva da Educação Matemática, na qual o termo modelagem se consolidou como linha de investigação, convém sublinhar que nas pesquisas fonte desta oficina realizadas na nossa equipe, utilizamos a *Modelagem paramétrica*.

A **Modelagem paramétrica** é uma técnica de geração e manipulação de objetos geométricos, como curvas e superfícies em ambiente computacional, e se apoia na conexão destes objetos e suas inter-relações mediadas por parâmetros especificados que podem ser alterados automaticamente pelo ambiente ou pelo sujeito em tempo real, sem perda da geometria visada (Henriques, 2021b, p. 107, **grifo nosso**). Um **Visor Cartesiano** é um protótipo paralelepípedo fino, materializado na impressora 3D, ou com outras tecnologias, contendo, crivos de curvas na superfície com **relevo**, podendo ser vistos a olho nu, ou notáveis por **tato**, preferencialmente para pessoas com deficiência visual, permitindo o estudo de conceitos matemáticos associados às referidas curvas, a partir das suas identificações, leituras e interpretação no registro gráfico (Henriques, 2021b, p. 101, **grifo nosso**).

Considerando esses conhecimentos preliminares, passemos a apresentação da oficina, que no

seu desenvolvimento seguirá o percurso ilustrado na Figura 1 até o Nível (03). A descrição de cada etapa (nível) desse percurso não será apresentada aqui, e sim comentada durante a aplicação da oficina.

Figura 1: Percurso metodológico do desenvolvimento e aplicação de PCOC (PMDAP)



Fonte: (Henriques, Farias, Funato, 2021, p. 482)

3 Produção do Visor Cartesiano no GeoGebra

O protótipo que implementaremos no *GeoGebra*, durante a oficina, é baseado no livro “Introdução ao Maple Enquanto Sistema de Computação Algébrica & Gestão de Código para Impressora 3D” de Henriques (2021b), organizado, não por capítulos, e sim em aula por aula. O visor apresentado nessa obra, na 10ª Aula, a partir da página 107, refere-se ao estudo de funções afim, cuja implementação é organizada em grupos de execução, no *software Maple*. Assim, os participantes da oficina terão o seguinte PROBLEMA emblemático (nível (0)) do PMDAP): Produzir um Visor Cartesiano Interativo no *GeoGebra* visando a aprendizagem de curvas polares, de equações indicadas na Tabela 1, pelos ECDV por tato, e a olho nu para estudantes videntes.

Seguindo a 10ª Aula (Henriques, 2021b), no Nível (01) descreve-se, um Visor paralelepípedo fino de base quadrada, contendo quatro crivos das curvas polares de equações indicadas na Tabela 1:

Tabela 1: Curvas polares como objetos matemáticos implementados no Visor com relevo favorecendo o tato

N.	Equação polar	Nome da curva polar de equação indicada na segunda coluna
1	$r = a, a \geq 0$	Circunferência de raio a centrada na origem.
2	$r = a + a \cos(\theta), a \neq 0$	Cardioide com raio maior sobre o eixo x (positivo)
3	$r = a + a \cos(n\theta), a \neq 0, n > 1$	Rosácea de n pétalas, se n é inteiro positivo ímpar, maior do que 1. Ou rosácea de $2n$ pétalas se n é par.
4	$r = a\theta, a \neq 0$	Espiral de Arquimedes para todo a real não nulo.

Fonte: (Recorte do Quadro 6.2 da 6ª Aula, Henriques, 2021b, p. 79)

Cada curva, no registro gráfico, correspondente a cada uma dessas equações será implementada no *GeoGebra* 3D com relevo sobre o visor de modo que seja acessível por tato, naturalmente, na versão do Visor materializado na impressora 3D e a olho nu por videntes.

A *Modelagem paramétrica* será organizada em grupos de execução, implementando cada curva com relevo na superfície do Visor, em um dos quatro quadrantes do sistema de coordenadas cartesianas plano cada. Vale sublinhar que as quatro equações apresentadas na Tabela 1 não são as únicas equações polares existentes. O livro fonte desta oficina, e as demais referências na litura são provas disso.

Ainda no Nível (01) destaca-se que é preciso, nessa modelagem, os participantes mobilizarem os conceitos de parametrização de superfícies e de gráfico de funções. “Uma **Superfície** S no registro

gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) do espaço tridimensional que satisfazem a equação $F(x, y, z) = 0$, no registro algébrico” (Henriques, 2021b, p. 94). A ferramenta que encontramos no *GeoGebra* munida de potencialidades para a visualização de superfícies de equações é denominada “*Superfície*”. O esquema instrumental de utilização dessa ferramenta mobiliza a seguinte sintaxe:

Superfície (Expressão, Expressão, Expressão, Variável 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável 2, Valor Inicial, Valor Final)

Nesta sintaxe as informações: “**Expressão, Expressão, Expressão**” representam expressões das equações paramétricas de uma superfície S . Ao passo que “**Variável 1 e Variável 2**” representam os parâmetros de extremidades no **Valor Inicial** e **Valor Final**, cada.

Essa exigência ou potencialidade do ambiente computacional *GeoGebra* remete ao conhecimento de parametrização de uma superfície S no ambiente papel/lápis em virtude da aliança existente entre os dois ambientes de aprendizagem. Assim, para uma dada superfície S , consideramos a parametrização definida por:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

em que $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ são funções de duas variáveis, que especificam a parametrização da S de parâmetros u e v (Henriques, 2021b, p. 96). Na referida aliança, vemos, portanto que:

$X(u, v) = \text{Expressão}, Y(u, v) = \text{Expressão}, Z(u, v) = \text{Expressão}, u = \text{Variável 1 e } v = \text{Variável 2}$

Uma curva traçada sobre uma superfície S é constituída por um conjunto de pontos de S que satisfazem a equação dessa curva. No ambiente computacional *Maple*, assim como no *GeoGebra*, essa curva é visível a olho nu na tela do computador, mas, no contexto da Educação inclusiva, visando acessibilidade desse conhecimento à ECDV por tato sobre o visor impresso em 3D, essa curva se torna inacessível, inclusive invisível para quem vê. Daí a necessidade na mobilização do conceito de toro:

Em Matemática, o toro é uma superfície que consiste em um espaço topológico homeomorfo ao produto de duas circunferências, contidas em dois planos ortogonais entre si, cada [Figura 2], e tem a forma de uma câmara de ar de um veículo. No contexto geométrico pode-se, portanto, dizer que um toro, enquanto superfície, no registro gráfico, consiste no lugar geométrico tridimensional formado pela revolução da circunferência menor de raio b (*Geratriz*) em torno da circunferência maior de raio a (*Diretriz*) Henriques (2021b, p. 98). No registro algébrico, a superfície de um toro é parametrizada com as seguintes equações:

$$\begin{cases} X(u, v) = (a + b \cos(v)) \cos(u) \\ Y(u, v) = (a + b \cos(v)) \sin(u), u, v \in [0, 2\pi], \text{ sendo } b < a \\ Z(u, v) = b \sin(v) \end{cases}$$

em que a é o raio da *circunferência Diretriz* do toro e b é o raio da *circunferência Geratriz* do **toro**, conforme mostrado na Figura 2 (Henriques, 2021b, p. 98).

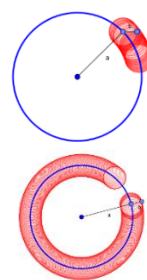
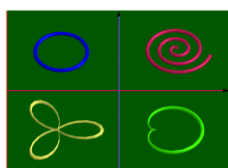


Figura 2: Ilustrativo de um processo geométrico de geração de um toro

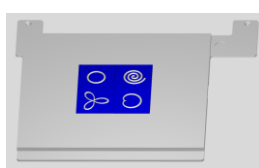
Assim, podemos passar para o **Nível (02)** do percurso PMDAP que consiste na *Modelagem paramétrica*. Essa modelagem será implementada no *GeoGebra 3D* pelos participantes durante a o

desenvolvimento da oficina. Apresentamos, no entanto, na Figura 3 os resultados esperados que foram alcançados na nossa análise preliminar trilhando as quatro etapas (Nível 0 ao Nível 03) do PMDAP.

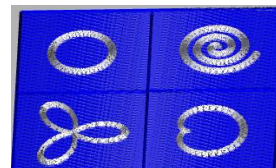
Figura 3: Ilustração do resultado esperado na produção do visor cartesiano de quatro curvas polares com relevo



(a) O Visor no *GeoGebra*: Circunferência. Espiral de Arquimedes. Rosácea e Cardioide.



(b) O Visor em código *stl* para impressão 3D sobre a mesa do *software Cubex*.



(c) O Visor fatiado (Build) no *software Cubex* para impressão 3D.

Descrição de material, dimensões e do tempo estimado de Impressão 3D do visor

12cm de largura. 12 cm de comprimento. 0.2 cm de altura. Tempo estimado 1:41. Material PLA. Massa 38.61 gramas de PLA. *Thickness* (espessura) 0.5 mm de PLA.

Fonte: Autores

4 Considerações Finais

Produzir materiais didáticos visando a Educação inclusiva requer uma dedicação de profissionais da Educação. Particularmente no âmbito da Matemática, podemos notar que é fundamental a mobilização de diversos conceitos matemáticos em diferentes contexto e registros de representação, que juntos podem oferecer uma manutenção a Educação inclusivo. Um visor assim produzido, e materializado na impressora 3D, pode beneficiar o aprendizado de PCDV, utilizando, não apenas o protótipo em si, mas combinado com a comunicação matemática de conceitos correspondentes na língua materna, isto é, o diálogo entre o Professor e o Estudante, nesse processo.

5 Referências

- ABREU, T. E. B. O ensino de Matemática para alunos com deficiência Visual. Universidade Estadual Fluminense Darcy Ribeiro-UENF, Campos dos Goytacazes-RJ, 2013.
- BRASIL. Legislação (2015). Lei 13.146, de 6 de julho de 2015. Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência. Disponível em [link](#). Acessado em: 10/01/2025.
- DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. 1993.
- HENRIQUES, A. Abordagem Instrumental e aplicações. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.23. p. 247-280, 2021a.
- HENRIQUES, A. Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D. Ilhéus, BA: Editus. 2021b, 247 p.
- HENRIQUES, A., FUNATO, R. L., FARIAS, E. S. Aliança entre práticas desenvolvidas no ambiente papel/lápis e computacional GeoGebra na aprendizagem de superfícies Quádricas. XIX EBEM, 2021.
- LUZ, T. S. da. HENRIQUES, A. A Construção do Número por Pessoas com Deficiência Visual Mediada por Materiais Concretos Manipuláveis. Revista de Educação em Ciências e Matemáticas. v. 18, n. 40. 2022.
- RABARDEL P. Les Hommes et les Technologies: Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin Editeur, Paris. 1995.