

Erros em Aritmética: Análise, Interpretação e Formação Docente

Errors in Arithmetic: Analysis, Interpretation and Teacher Education

Rita Santos Guimarães¹ • Marcelo Firer²³

Resumo: Este trabalho apresenta uma proposta de oficina a ser realizada no XV Encontro Nacional de Educação Matemática, abordando a análise e interpretação de erros em aritmética como ferramenta pedagógica. Baseada em um Programa de Pesquisa em Educação Básica (Proeduca), financiado pela Fapesp e desenvolvido em parceria com escolas do Ensino Fundamental, a oficina visa capacitar professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais e nos primeiros Anos do Ensino Fundamental, para identificar e utilizar erros de alunos como ponto de partida para intervenções didáticas que promovam a compreensão matemática. Através da discussão coletiva de respostas reais de estudantes, será possível refletir sobre quais conhecimentos, habilidades e limitações tais itens revelam. A reflexão sobre erros e resoluções de estudantes cria oportunidades para que professores desenvolvam habilidades importantes intrinsecamente relacionadas a sala de aula em geral e a aprendizagem de seus estudantes em particular.

Palavras-chave: Aritmética. Erro de alunos. Anos Iniciais. Reflexão.

Abstract: This text presents a proposal for a workshop to be developed at the XV Encontro Nacional de Educação Matemática, addressing the analysis and interpretation of errors in arithmetic as a pedagogical tool. Developed in a Basic Education Research Program (Proeduca), funded by Fapesp and in partnership with elementary schools, the workshop aims to enable teachers who teach mathematics in the Early Years and the first years of Elementary School to identify and use student errors as a starting point for didactic interventions that promote mathematical understanding. Through collective discussion of real student responses, it will be possible to reflect on what knowledge, skills and limitations such items reveal. Reflection on student errors and solutions creates opportunities for teachers to develop important skills intrinsically related to the classroom in general and the learning of their students in particular.

Keywords: Arithmetic. Students' errors. Early Years. Reflection.

1 Introdução

Existe uma literatura farta na área de educação sobre erros no ensino de matemática. Uma parte significativa dessa literatura de pesquisa foca na identificação e classificação de erros, relacionado a conteúdos diversos: álgebra básica, probabilidade e estatística, geometria e, foco de nosso interesse, aritmética dos Anos Iniciais. Este é o caso, por exemplo, de boa parte da literatura nacional que busca identificar erros operacionais em algoritmos.

Em um trabalho importante de Radatz (1979), encontramos uma tentativa de tipificar e classificar os erros em aritmética. O trabalho recente de Guérios e Daniel (2015) foca em erros operacionais, mas busca compreender o raciocínio dos alunos.

Uma outra questão pertinente é o papel do erro no processo de aprendizagem. O precursor de resolução de problemas em matemática, G. Polya, em um vídeo que resolvia problemas com estudantes universitários, repetia insistentemente: “*Guess, don't be afraid of*

¹ Universidade de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • guimaraes.rita@ime.usp.br • ORCID 0000-0002-6324-7436

² Universidade Estadual de Campinas • Campinas, SP — Brasil • mfirer@ime.unicamp.br • ORCID 0000-0001-6887-7683

³ Os autores agradecem o financiamento da Fapesp, processo 2022/06882-4.



errors, guess!” (vídeo disponível em <https://shorturl.at/nkYoS>, ver a partir do minuto 8:10). Nesta linha, a pesquisadora Rafaella Borasi (1997) propõe revisitar a natureza e o papel do erro no contexto de educação (matemática).

Pensando num contexto bastante prático de orientação/formação para professores, é possível encontrar uma abordagem consistente de erros esperados e *misconceptions* no volumoso trabalho de Van de Walle (2009). Já focando em atividades para alunos, também encontramos erros (plausíveis) de alunos explorados sistematicamente como estratégia de aprendizagem no material produzido pelo SERP *Institute*, que apresenta aos próprios alunos exemplos de soluções corretas e erradas para que “analisem, expliquem e resolvam”.

Figura 1: Exemplo de atividades para os alunos estudarem a partir de soluções corretas e erradas

SET ONE

1. Study Mary's correct work.

Name: Mary

Solve. Represent the problem on the place value chart.

$10 \times 1 \text{ hundred} = 1 \text{ thousand}$

Thousands	Hundreds	Tens	Ones
	••••••••		

2. Answer these questions.

- Mary drew 10 dots in the hundreds column. How many hundreds does that represent?
- Why did Mary circle the hundreds and move the bundle to the thousands column?

SET TWO

1. Study Wendell's incorrect work.

Name: Wendell

Solve. Represent the problem on the place value chart.

$10 \times 2 \text{ tens} = 2 \text{ ones}$

Thousands	Hundreds	Tens	Ones
		••••••••	••

2. Answer these questions.

- Wendell correctly drew 20 dots in the tens column. What do those 20 dots represent?
- Wendell did not shift the dots correctly. What column should Wendell have moved the dots to? Explain your reasoning.

Fonte: Site do projeto <https://www.serp.institute.org/math-by-example>

O Projeto Kira (www.kira.dzlm.de) faz um levantamento sistemático de estratégias de alunos para resolver problemas de aritmética, incluindo erros em aritmética. Citando o projeto Kira: “*The following pages are intended to show which mistakes children make along the way and which ideas or understandings lie behind these mistakes.*” Todo o projeto Kira, incluindo o material que reflete sobre erros, foi feito para formação de professores que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Este é o intento desta oficina: permitir que o professor possa perceber melhor os erros e dificuldades em aritmética e promover uma compreensão das ideias e equívocos conceituais que estão por trás destes erros. Acreditamos que este conhecimento é importante para um ensino que deseje colocar os alunos no centro do processo de ensino-aprendizagem.

2 Projeto Proeduca-Fapesp: fonte do material

Aritmética, o conceito de números e as quatro operações básicas, formam a espinha dorsal de toda a aprendizagem matemática. Considerando que a formação inicial de



professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental tem uma carga diminuta dedicada ao estudo de matemática, os autores desta proposta decidiram desenvolver um programa de formação continuada em matemática para este público.

Desenvolvemos um programa de formação que é sistemático e fortemente ancorado na prática e realidade de escolas públicas. Este programa está sendo financiado pela Fapesp e Seduc-SP (edital Proeduca-Fapesp). Durante os anos de 2023 e 2024 os pesquisadores frequentaram semanalmente uma escola parceira, uma escola municipal de Ensino Fundamental da cidade de Campinas – SP, entrando nas salas de aula e trabalhando com as professoras da escola.

Neste processo, foi coletada uma coleção muito grande de respostas de alunos a exercícios e problemas diversificados de aritmética. Examinando este material nos deparamos com o desafio de interpretar erros de alunos. Esta discussão foi compartilhada com as professoras da escola e mostrou-se extremamente rica e produtiva. Uma das professoras, numa avaliação final do projeto, afirmou que esta tinha sido a maior contribuição a sua formação: a capacidade de entender o que e como os alunos estão pensando, a partir dos seus erros. Vale destacar que o material disponível inclui não apenas resoluções escritas, como dezenas de horas de vídeo em que podemos observar alunos individuais resolvendo problemas e por vezes, sentimos que é quase possível “enxergar seu raciocínio dentro de suas cabeças”.

Disseminar o grande potencial para formação de professores da análise desse tipo material é o contexto e a motivação para esta oficina.

3 Proposta da oficina

A oficina será baseada em parte do material coletado no âmbito do projeto Proeduca-Fapesp e em parte utilizado no processo formativo com as professoras da escola parceira.

Na oficina apresentaremos diversos episódios, em imagens ou vídeos, norteando a discussão sempre por quatro questões:

- 1) Quais são as intenções pedagógicas do professor ao apresentar este problema ou esta situação?
- 2) Há algum erro (na resposta ou raciocínio do aluno)? Se houver um erro do aluno, identifique-o e reflita sobre os possíveis fatores que podem ter contribuído para que ele ocorresse.
- 3) Qual foi o raciocínio do aluno? O que ele pensou e que estratégias



adotou para responder a esta questão ou situação?

- 4) Como o professor pode agir com base nessas observações?

As atividades propostas na oficina alinham-se aos princípios do *teacher noticing*, conforme discutido por Mason (2002) e outros pesquisadores. Em síntese, desenvolver a habilidade de *noticing* consiste em aprender a observar de modo produtivo em ambientes complexos, como a sala de aula, e tomar decisões pedagógicas informadas, alinhadas aos objetivos de aprendizagem. A análise e reflexão coletiva sobre os erros dos estudantes são estratégias centrais para aprimorar essa competência nos professores.

Além disso, compreender os erros e as dificuldades dos alunos integra uma das dimensões do conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC), conforme Baumert *et al.* (2010). Esse estudo destaca que o CPC tem "maior poder preditivo para o progresso do aluno e é decisivo para a qualidade do ensino" (p. 164), reforçando sua relevância na prática docente.

Apenas a título de exemplo, apresentamos uma situação, relativamente simples, mas que ilustra a ideia geral da oficina. Uma tarefa, para alunos de 4º ano do Ensino Fundamental, tinha o seguinte enunciado:

A Maratona “somos todos matemáticos” tem 42 km de percurso. Marcelo já correu 17 km. Quanto falta para Marcelo terminar a corrida?

Este é uma questão que demanda duas etapas: equacionar e depois resolver o problema. Na Figura 2, temos as respostas de dois alunos. Ambos modelaram o problema corretamente e sabiam qual resultado buscavam: a diferença entre 42 e 17, resultado da subtração $42 - 17$. No entanto, ambos erram ao tentar calcular o resultado.

Figura 2: Resoluções erradas de dois alunos para o problema acima.

D	U
4	2
-	1
3	5

RESPOSTA: 35 KM
FAUTAM

Fonte: Dados da Pesquisa

É provável que, ao solicitar a resolução deste problema, a professora buscava verificar se os estudantes reconheciam o significado de “quanto falta” para a subtração, que é um significado secundário (“retirar” é um significado primário). Estes dois estudantes demonstraram tal habilidade. Porém, verificamos que, apesar de armar a conta que resolveria



o problema corretamente, o algoritmo tradicional da subtração não foi executado de forma adequada. Mesmo reconhecendo as ordens de cada algarismo envolvido (segundo exemplo com o quadro “D U”) a execução do passo a passo não foi correta.

Notamos que os estudantes realizaram a subtração $7 - 2$ na ordem das unidades, sendo que o correto seria $2 - 7$. Tal erro pode até ser considerado, de certa forma, esperado já que nesta fase da escolaridade, apenas tratamos de números positivos. Porém, muito antes de decorar os passos de qualquer algoritmo, é fundamental que os estudantes estejam familiarizados com os diversos significados de subtração e que tenham repertório diversificado para resolver tais situações SEM a necessidade do algoritmo. Por exemplo, neste item, os estudantes poderiam ter realizado $42 - 20 = 22$ e $22 + 3 = 25$, obtendo a resposta correta. Ou ainda, $40 - 10 = 30$, e ao tirar 7 de 2, notar que ainda preciso tirar 5, ou seja, $30 - 5 = 25$. Ambas estratégias sugerem flexibilidade e compreensão do Sistema de Numeração Decimal Posicional e do significado de subtração.

Podemos refletir se a apresentação do algoritmo foi realizada em um momento adequado no processo de aprendizagem desses estudantes. Conjecturamos que, as ideias de agrupamento, decomposição e subtração ainda não estão bem estabelecidas a ponto de serem aplicadas a uma sequência de passos – como é a execução do algoritmo. Seria benéfico que os estudantes adquirissem fluência e flexibilidade na resolução de problemas do tipo “quanto falta” com outras estratégias (além do algoritmo) e com valores menores.

Durante a oficina, teremos a oportunidade de refletir coletivamente sobre diversos exemplos de erros em itens de aritmética, incluindo alguns erros muito mais desafiadores para interpretação, como por exemplo os três itens da questão abaixo: entender o quê e como pensou o aluno ao responder o item (c) fica como um desafio que discutiremos na oficina.

Figura 3: Exemplo de erro a ser discutido na oficina – Como o aluno obteve 71 no item (c)?

<p>a) $2 \times 244 = 248$</p>	<p>b) $3 \times 45 = 55$</p>	<p>c) $5 \times 38 = 71$</p>
-------------------------------------------	-----------------------------------------	-----------------------------------------

Fonte: Dados da Pesquisa



Esperamos que a oficina ofereça aos participantes condições para desenvolver suas habilidades de *noticing* por meio da reflexão coletiva sobre erros reais, ajudando-os a reconhecer e transformar esses equívocos em caminhos para intervenções didáticas que estimulem a compreensão matemática.

Referências

BAUMERT, Jürgen, *et al.* Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, v. 47, n. 1, p. 133–180, 2010.

BORASI, Raffaella. *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publ, 1996.

GÖTZE, Daniela; SELTER, Christoph; ZANNETIN, Elena. *Das Kira-Buch: Kinder rechnen anders: Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Klett Kallmeyer, 2019.

GUÉRIOS, Ettiène; SERAFINI DANIEL, Jane Eletra. *Entre erros e acertos: revelações sobre a aprendizagem das Operações Aritméticas Elementares de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental*. REMATEC, Belém, v. 10, n. 20, 2016.

MASON, John. *Researching your own practice: the discipline of noticing*. London New York, NY: Routledge, 2002.

RADATZ, Hendrik. *Error Analysis in Mathematics Education*. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 10, n. 3, p. 163, 1979.

VAN DE WALLE, John A. *Matemática no ensino fundamental: formação de professores em sala de aula*. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.