

Estrutura e Comportamento do Crescimento Exponencial Usando a Dinâmica de Sistemas

Fátima Afonso Aguilar¹, José Dávalos Chuquipoma²

Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, MG.

Resumo. A partir do trabalho pioneiro Industrial Dynamics [2], baseado em seus ensinamentos de engenharia elétrica e gerenciamento de corporações, Jay Forrester cria e desenvolve a Dinâmica de Sistemas (DS). Forrester manifesta que a DS é um método para entender como todos os objetos de um sistema interagem entre si, na procura por um objetivo em comum. Atualmente DS está sendo aplicada como ferramenta de ensino para a interpretação quantitativa e qualitativa de modelos matemáticos (KUBICEK, 2011). Nesta proposta nos objetivamos a descrever essa metodologia e aplicar para o ensino do crescimento exponencial. Com ajuda do software de simulação Vensim-PLE, conseguimos simular aspectos introdutórios dessa teoria em um nível de ensino médio, analisar a sua eficácia e influência na criação de modelos que evoluem no tempo. Destacamos a dinâmica de estoque e fluxo como ponto de partida para o entendimento do processo de crescimento exponencial.

Palavras-chave. Dinâmica de Sistemas, Vensim-PLE, Estoque e fluxo, Metáfora da banheira, Diagrama causal.

1 Introdução

Durante o Ensino Médio, os alunos da disciplina de matemática são convidados a usar e interpretar diversos conceitos matemáticos, entre outros, podemos mencionar por exemplo, a função afim e função exponencial. Ainda assim, no caso da função exponencial, os alunos geralmente apresentam certas deficiências na compreensão desse tipo de crescimento. Perguntas comuns como o que é crescimento exponencial? de onde vem? o que implica? e quando isso acaba? devem ser reforçadas. Diante disso, a análise do crescimento de funções não é apenas motivadora para o ensino de matemática, mas também para a compreensão do tema em outras áreas do conhecimento, o que é um ponto de partida motivador no início de uma iniciação científica nesse nível de ensino. De acordo com o exposto, encontramos um amplo embasamento nas políticas públicas educacionais e, em particular, na reforma curricular do Ensino Médio:

(...) a implementação gradual da disciplina de Iniciação Científica vem sendo trabalhada, a disciplina aparece na matriz curricular do segundo e do terceiro ano do ensino médio. Um dos objetivos, entre outros, é aprofundar os conceitos fundamentais das ciências, ampliar habilidades relacionadas ao pensamento científico e utilizar esses conceitos e habilidades em procedimentos de investigação voltados à compreensão e enfrentamento de situações cotidianas. (Portaria MEC, N^o 1.432, de 28/12/2018).

O principal objetivo da pesquisa é propor uma reflexão sobre o uso da Dinâmica de Sistemas (DS) como ferramenta metodológica, como uma alternativa de modelagem ativa para o ensino de matemática na educação básica e de forma particular, no ensino da dinâmica do crescimento

¹fatimafonso@gmail.com

²jadc13@ufsj.edu.br

exponencial. Através da DS é possível interpretar e identificar as variáveis que estão presentes no problema, bem como analisar suas relações de causa e efeito. Isso resulta motivador em oferecer ensino de matemática aplicável nas escolas de forma diferente, colocando ao aluno e professor na capacidade ativa de interpretar e simular problemas. A DS também tem sido aplicada em outras latitudes como ferramenta de ensino para a interpretação quantitativa e qualitativa de modelos matemáticos. Nesse sentido, é importante ressaltar o trabalho de Kubicek (2011), onde o autor coloca em prática a DS como metodologia dinâmica na construção e implementação de modelos simples e didáticos. Nesse contexto, este projeto visa contribuir para o conhecimento das vantagens da metodologia DS no nível básico, com o objetivo de tornar a educação matemática uma ferramenta aplicável para futuros trabalhos de iniciação científica. Ao transferir conceitos de função afim, proporcionalidade e função exponencial, estudados por alunos do ensino médio, é possível introduzir novos conceitos de crescimento neste nível educacional, como é o caso do chamado crescimento logístico por exemplo. Para a implementação dos elementos que compõem essa teoria, é necessário o uso de alguma ferramenta ou software computacional para entender os elementos que compõem essa teoria. Diagrama causal, diagrama de estoque e fluxo, entre outros, fazem parte dessa metodologia e são interpretados com o auxílio do software Vensim. O Vensim foi criado pela Ventana Systems Inc. (Vensim, 2017), para possibilitar analisar e desenvolver modelos da DS. O software proporciona uma interface acessível, elaborando gráficos e tabelas com certa facilidade, e pode ser baixado gratuitamente para uso educacional no site: <https://vensim.com/>.

2 Metodologia

O desenvolvimento da metodologia da DS é inicialmente realizada através de uma pesquisa exploratória com revisão bibliográfica em sites, livros e artigos. Para a simulação dos processos de crescimento exponencial, usamos, primeiro, o software Vesim-PLE como ferramenta computacional para interpretar os elementos que conforma a DS e segundo, simular a dinâmica do modelo de crescimento exponencial através da DS. A decisão pelo uso do software passa principalmente pela facilidade da manipulação dessa ferramenta. Usando o pensamento sistêmico é possível interpretar e relacionar as variáveis e eventos que aparecem no modelo, isso é feito através do diagrama causal que nos infere em um estado inicial, obter as relações qualitativas da dinâmica. Os resultados quantitativos da modelagem são interpretados pelos diagramas de estoque e fluxo, ou também chamados de diagrama de Forrester. O Vensim-PLE oferece além de visualizar os resultados simulados, entender como a dinâmica evolui a medida que o tempo decorre, além disso o software oferece o tipo de crescimento da dinâmica de estoque e fluxo. Por último, usando o diagrama de estoque e fluxo no software é possível direcionar ao aluno entender os processos de crescimento da função exponencial sem o rigor matemático. Para a apresentação aprofundada do ambiente virtual de simulação de crescimento exponencial, abordamos problemas envolvendo matemática financeira que serão apresentados no tópico de resultados, sendo que esses exemplos oferecem exemplos didáticos para o entendimento da metáfora da banheira da DS, ver Figura 1.

3 Resultado e Discussões

3.1 Introdução à Dinâmica de Sistemas

Definição 3.1 (Modelo Causal). *Os Modelos Causais são representados por diagramas que servem para descrever uma situação-problema de acordo com o princípio causa-efeito.*

De acordo com Villela (2005): A DS permite a construção de gráficos de relações causais onde se procura delimitar e pesquisar quais as relações de causa e efeito (qualitativo) que existem entre os elementos de um sistema.

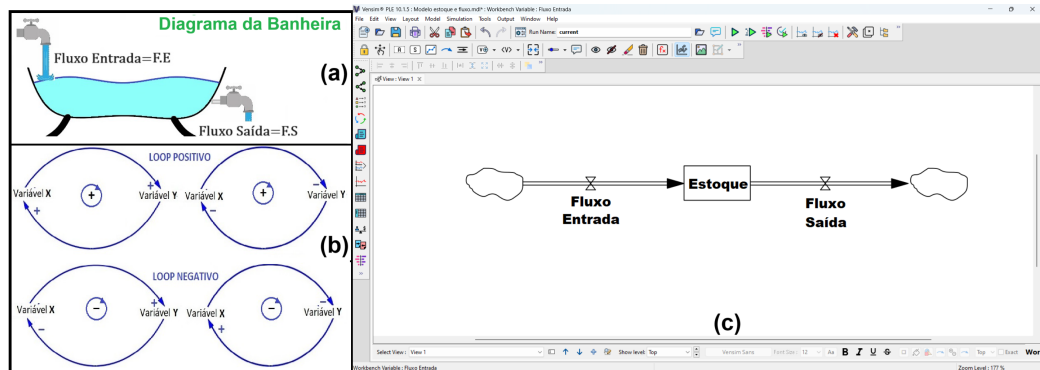


Figura 1: (a) Metáfora da banheira. (b) Diagrama Causal entre as variáveis x e y . (c) Diagrama de estoque e fluxo feito no Vensim-PLE, a nuvem representa uma fonte (entrada) ou sumidouro (saída) dos fluxos do material (água).

Definição 3.2 (Relações Causais). *Uma variável X influencia na variável Y de forma **positiva**, se X cresce, então Y cresce, ou, se X decresce, então Y também decresce. X influencia na variável Y de forma **negativa**, se X aumenta, então Y diminui, ou, se X diminui, então Y aumenta.*

Definição 3.3 (Feedback positivo e negativo). *Um ciclo de Realimentação entre as variáveis X e Y é **positiva**; se a influencia de X sobre Y e a influencia de Y sobre X for positiva, ou, se a influencia de X sobre Y e a influencia de Y sobre X é negativa. Um ciclo de Realimentação entre as variáveis X e Y é **negativa**; se a influencia de X sobre Y for positiva e a influencia de Y sobre X for negativa, ou, se a influencia de X sobre Y for negativa e a influencia de Y sobre X for positiva.*

Com os modelos causais podemos deduzir a tendência de crescimento ou decrescimento das variáveis. Em resumo temos:

- Um Ciclo de realimentação positiva equivale a tendência de crescimento (ou decrescimento).
- Um Ciclo de realimentação negativa equivale a tendência à estabilidade (não cresce, nem decresce).

Definição 3.4 (Estoque e Fluxo). *Os Modelos de Estoque e Fluxo são modelos que expressam as relações entre as variáveis por meio de fórmulas matemáticas que por sua vez interpretam o raciocínio lógico presente no modelo.*

O estoque ou também chamado de variável de nível ou estado, são variáveis referentes a um instante de tempo, por exemplo, a população de indivíduos, o número de funcionários de uma empresa, etc. Os fluxos referem-se a um período de tempo, por exemplo, nascimentos, mortalidade, migrações, etc. Os níveis ou estoques mudam de valor porque possuem fluxos de entradas e saídas, essa ideia fundamental servirá de base para interpretar a construção de modelos utilizando o Vensim.

3.2 Estrutura do Crescimento Exponencial através da DS

A variação de uma função assume muitas formas, e a variedade de dinâmicas ao nosso redor é abrangente, não resulta difícil imaginar que existe uma grande variedade correspondente de diversas estruturas de retroalimentação (feedback) para dar conta de uma gama tão rica de dinâmicas. Na verdade, a maioria dos crescimentos de funções são estágios de um número bastante pequeno de padrões distintos de comportamento, como crescimento exponencial ou oscilatórios. Um dos modos mais fundamentais de comportamento é o crescimento exponencial, a dinâmica desse crescimento

é gerado por uma estrutura de feedback simples: o crescimento surge do feedback positivo, o qual surge de interações não lineares das estruturas de feedback fundamentais. O que significa que o crescimento exponencial surge de um feedback positivo? significa que quanto maior é a quantidade da grandeza, maior resulta ser a taxa de variação instantânea, aumentando ainda mais a quantidade e levando a um crescimento cada vez mais rápido (Figura 2 (a)). Os casos emblemáticos desse tipo de dinâmica são os juros compostos e o crescimento das populações. Quanto mais dinheiro investimos em uma poupança, mais juros você ganha, portanto, maior será o seu saldo e maior ainda será o próximo pagamento de juros. Analogamente, quanto maior a população de indivíduos de uma população, maior a taxa de variação de natalidade, aumentando a população e eventualmente levando a ainda mais nascimentos, tornando o crescimento em um ritmo cada vez mais acelerado. O crescimento exponencial tem a notável característica de que o tempo de duplicação é constante: o estado do sistema dobra em um período fixo de tempo, não importa quão grande seja.

Se supunhamos que uma certa grandeza x está relacionada com outra grandeza t através da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $x = f(t)$. Se percebemos que no processo de crescimento da função obedece a seguinte situação: *quanto maior é a quantidade da grandeza x , maior resulta ser a taxa de aumento líquida de x* ; é evidente que temos uma relação de proporcionalidade, então, essa percepção pode ser traduzida na linguagem matemática pela seguinte expressão de proporcionalidade:

$$\frac{df}{dt} = \alpha f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

Na verdade é esse o comportamento de feedback dinâmico que caracteriza a um crescimento do tipo exponencial, a constante α é conhecida como o fator de crescimento relativo. Situação análoga acontece quando as grandezas compartilham uma relação dinâmica de decrescimento, nesse caso a constante α é negativo e a característica de feedback positivo ainda permanece, é dizer, *quanto menor é a quantidade da grandeza x , menor resulta ser a taxa de aumento líquida de x* . Figura 2.

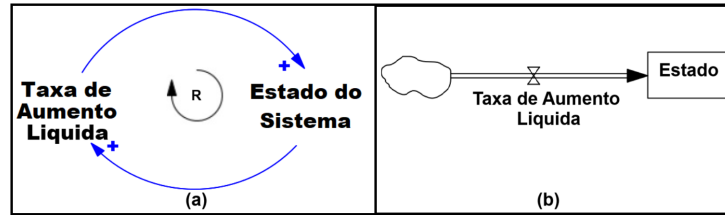


Figura 2: Estrutura do Crescimento Exponencial. (a) O diagrama causal é definido por um feedback positivo R entre as variáveis: Taxa de Aumento Líquida e Estado. (b) Diagrama de estoque e fluxo para o crescimento exponencial realizado no software Vensim-PLE.

3.3 Aplicação da Metodologia

Problema 1: Calcular a evolução de uma poupança durante um período de 12 meses, com um capital inicial de 10.000 reais, mensalmente é retirado uma quantia de 200 reais, com uma taxa de juros de 15% ao mês.

Solução: Nesse exemplo aparece a nova variável **Taxa de Juros**. O diagrama causal realizado no Vensim, é mostrado na Figura 3. Temos a presença de dois ciclos de retroalimentação (feedback), um positivo R1 e o outro R2 negativo. Os juros serão calculados pela a equação:

$$\text{Depósito} = \text{Poupança} \cdot \text{Taxa de Juros}.$$

Mas a variável Depósito, onde vamos escrever a equação acima, não tem conhecimento da existência das variáveis Taxa de Juros e Poupança. Isso pode ser resolvido usando a função **Arrow** e apontar a Taxa de Juros para o Depósito e apontar a Poupança para o Depósito. O diagrama de estoque e fluxo realizado no Vensim é mostrado na Figura 4. Agora pressionamos o botão **Equations**

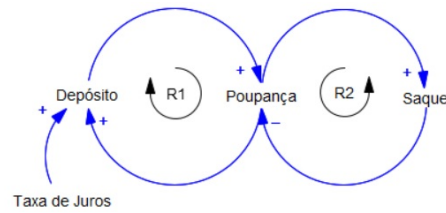


Figura 3: Diagrama Causal para a dinâmica do sistema do Problema 1.

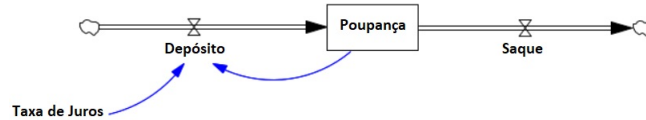


Figura 4: Diagrama de Estoque e Fluxo para o Problema 1, usando o Vensim-PLE.

e a variável Depósito para aparecer o quadro **Editing equation** for – Depósito. Por motivo do uso do botão Arrow, a Poupança e a Taxa de Juros estão identificados na janela com título Variáveis. Assim, a equação foi aceita pelo Vensim. A Figura 5 mostra a edição da simulação. A

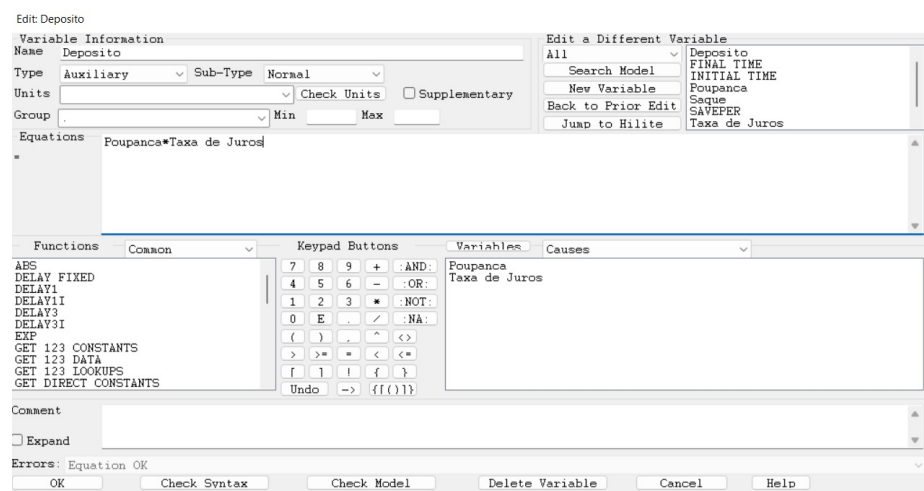


Figura 5: Editando Equation na variável Depósito do Problema 1 no Vensim-PLE.

variável Poupança apresenta uma curva crescente ao longo dos 12 meses do período programado em **Model-Settings**. Este tipo de **crescimento é do tipo exponencial**, (Figura 6).

Problema 2:(Atividade realizada em sala de aula) Um capital inicial de 1.000 reais é colocada em uma poupança a uma taxa de 0,02 cada mês. Realizar a dinâmica do sistema da evolução da poupança e identificar o tipo de crescimento.

Solução:(Resolução apresentada pelo aluno). Inicialmente o aluno identificou a variável Estoque com a poupança, e a variável Fluxo com rendimento. Sejam Poupança (0)=1000 e dt o intervalo de tempo. Foram usadas as seguintes equações:

Estoque ($t+dt$) = Estoque (t)+Fluxo (t). Rendimento (t) = Taxa de rendimento (t)·Poupança (t).

$$\text{Poupança}(t + dt) = \text{Poupança}(t) + \text{Rendimento}(t),$$

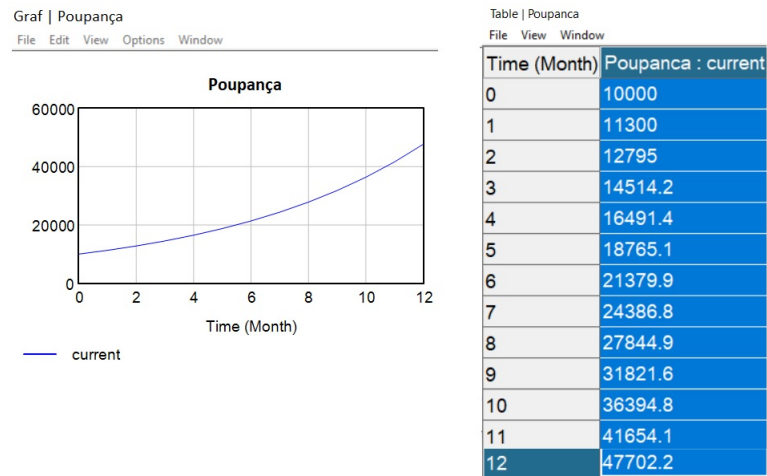


Figura 6: Simulando a dinâmica do modelo do Problema 1 no Vensim, (Método de Euler).

$$\text{Rendimento (1)} = 0,02 \cdot 1000 = 20, \quad \text{Poupança (1)} = 1000 + 20 = 1020.$$

$$\text{Rendimento (2)} = 0,02 \cdot 1020 = 20,40, \quad \text{Poupança (2)} = 1020 + 20,40 = 1040,40.$$

A conclusão do aluno foi que o crescimento era do tipo exponencial.

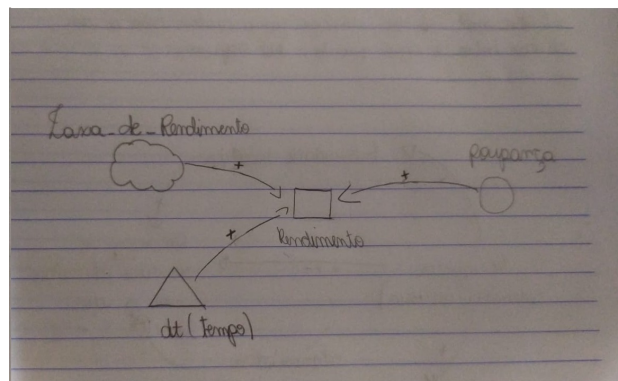


Figura 7: Representação do Diagrama de Estoque e fluxo (Elaboração aluna Camila).

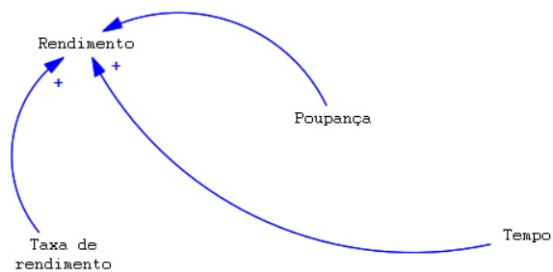


Figura 8: Modelo Causal da Poupança no Vensim-LE. (Aluna Camila.)

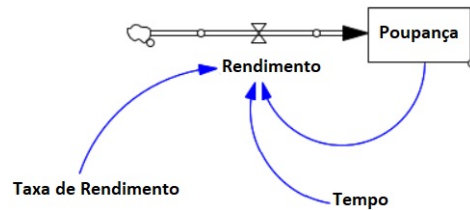


Figura 9: Modelo de Estoque e Fluxo no Vensim-PLE. (Aluna Camila.)

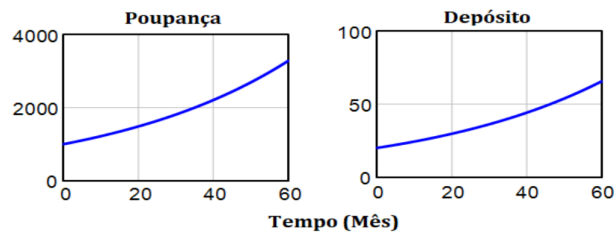


Figura 10: Simulação da poupança e depósito no Vensim-PLE. O gráfico mostra o comportamento exponencial da poupança (Aluna Camila.)

4 Considerações Finais

Nesta pesquisa foi aplicada a metodologia da DS em um nível do ensino médio, para a construção de modelos definidos por funções exponenciais. Explorando o software de simulação Vensim-PLE conjecturamos que é possível estabelecer a construção de conhecimento sobre o processo de crescimento exponencial, entender as características qualitativas do processo através do diagrama causal que origina a dinâmica e as características quantitativas do diagrama de estoque e fluxo. A metodologia permite ao aluno desenvolver a capacidade para a criação de seus próprios modelos.

Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018. Disponível em <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>>. Acesso em: 28 de setembro de 2022.
- [2] Forrester, J. W. Industrial Dynamics. [S.l.]: New York: John Wiley e Sons, 1961.
- [3] Kubicek, A. Models for Logistic Growth Processes (e.g. Fish Population in a Pond, Number of Mobile Phones within a Given Population). Real-World Problems for Secondary School Mathematics Students. Case Studies. Edited by Juergen Maasz and John O'Donoghue, Sense Publishers, pag. 187. Rotterdam, The Netherlands, 2011.
- [4] Silva Andrade, M. Dávalos José A. Dinâmica de Sistemas: Uma Proposta Metodológica na Interpretação de Modelos no Ensino Médio. *Anais do CMD*, Volume (3):1476- 1499. 2023.
- [5] Sterman, John D. Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World. Irwin/McGraw-Hill 2000.
- [6] Villela, P. R. C. Introdução à Dinâmica de Sistemas. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2005.
- [7] Vensim, V. P. User Guide-Vensim Introduction and Tutorials. [S.l.], 2017.